ABSTRACT OF THE DISSERTATION
TITLE: "HARDY–STEIN IDENTITY AND LITTLEWOOD–PALEY THEORY FOR NON-LOCAL OPERATORS"

AUTHOR: MICHAŁ GUTOWSKI

The Hardy–Stein identity captures the disintegration of the energy of a function from the L^p-space. By energy, we mean the p-norm of a function. Originally, the Hardy–Stein identity was derived by Stein in his book [6, pp. 86–88] for the Laplace operator, employing the chain rule for that operator. The study of a non-local instance of the Hardy–Stein identity is quite new. We may refer to Bañuelos, Bogdan, and Luks in [1] for the identity for Lévy-type operators on a Euclidean space. The Hardy–Stein identity can be investigated using both analytical and probabilistic approaches. The authors of [1] utilized the former. For the probabilistic approach, we may refer to Bañuelos and Kim [2], where Itô's formula was employed.

The author employs the theory of regular Dirichlet forms to generalize the previous results. A regular Dirichlet form is a closed, non-negative, symmetric, Markovian bilinear form $\mathcal{E}(u,v)$, with domain $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ dense in L^2-space, which possesses a core. The class of regular Dirichlet forms is in a one-to-one correspondence with a specific class of symmetric Markov processes known as symmetric Hunt processes.

One of the main results from the theory of Dirichlet forms is the Beurling–Deny formula, which provides the unique decomposition of a regular Dirichlet form $\mathcal{E}$ into three parts: the strongly local part $\mathcal{E}^{(c)}$, the jumping part with the jumping measure J, and the killing part with the killing measure k. These parts respectively describe the diffusive, jumping, and the killing behavior of the Hunt process associated with $\mathcal{E}$. This formula reads

$$\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}^{(c)}(u,v) + \frac{1}{2}\iint\limits_{E\times E\setminus\mathrm{diag}} (u(y)-u(x))(v(y)-v(x))\, J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) + \int\limits_E u(x)v(x)\, k(\mathrm{d}x)$$

for all continuous (in general quasi-continuous) functions u and v from the domain $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

In the present dissertation, the Sobolev–Bregman form (or shortly p-form) is employed as an extension of the Dirichlet form to L^p for $1 < p < \infty$. This notion has appeared in the literature defined only for pure-jump Dirichlet forms; see [4, 3]. The author proposes a general definition of the p-form using the approximation form of the Dirichlet form.

One of the main results of the dissertation is the Beurling–Deny formula for the Sobolev–Bregman form. The main advantage of this result is its validity for any regular Dirichlet form without requiring additional assumptions. Utilizing this result, the following general Hardy–Stein identity for all regular Dirichlet forms is proved:

$$\int\limits_E |f(x)|^p\, m(\mathrm{d}x) - \lim_{T\to+\infty} \|P_T f\|_p^p = \frac{4(p-1)}{p}\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{E}^{(c)}[(P_t f)^{\langle p/2\rangle}]\,\mathrm{d}t$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty}\iint\limits_{E\times E\setminus\mathrm{diag}} F_p(P_t f(x), P_t f(y))\, J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\mathrm{d}t + p\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_E |P_t f(x)|^p\, k(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t, \quad f\in L^p(m).$$

Here, the function $F_p(a,b) = |b|^p - |a|^p - pa^{\langle p-1\rangle}(b-a)$ is the so-called *Bregman divergence*, where $a^{\langle\gamma\rangle} = |a|^\gamma \operatorname{sgn}(a)$ is the *French power*. The family $(P_t)_{t\ge 0}$ of operators is the semigroup associated with the Dirichlet form.

Another result of the dissertation is the proof of the polarized analog of the Hardy–Stein identity for pure-jump Dirichlet forms. To achieve this, the author study the polarized version of p-form.

In the last chapter of the dissertation, the author follows [1, 5] and utilizes the obtained results to derive L^p-bounds of non-local Littlewood–Paley square functions. To adapt the approach from the mentioned papers to a more general setting, the Revuz correspondence is utilized. Additionally, the dissertation introduces new examples where Littlewood–Paley estimates do not hold and identifies an irreparable error in the paper [5].

References

[1] Rodrigo Bañuelos, Krzysztof Bogdan, and Tomasz Luks. Hardy–Stein identities and square functions for semigroups. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 94(2):462–478, 2016.

[2] Rodrigo Bañuelos and Daesung Kim. Hardy–Stein identity for non-symmetric Lévy processes and Fourier multipliers. *J. Math. Anal. Appl.*, 480(1):20, 2019. Id/No 123383.

[3] Krzysztof Bogdan, Tomasz Grzywny, Katarzyna Pietruska-Pałuba, and Artur Rutkowski. Nonlinear nonlocal Douglas identity. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 62(5):31, 2023. Id/No 151.

[4] Krzysztof Bogdan, Tomasz Jakubowski, Julia Lenczewska, and Katarzyna Pietruska-Pałuba. Optimal Hardy inequality for the fractional Laplacian on L^p. *J. Funct. Anal.*, 282(8):31, 2022. Id/No 109395.

[5] Huaiqian Li and Jian Wang. Littlewood-Paley-Stein estimates for non-local Dirichlet forms. *J. Anal. Math.*, 143(2):401–434, 2021.

[6] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 30 of *Princeton Math. Ser.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PT. „NIERÓWNOŚĆ HARDY'EGO–STEINA I TEORIA LITTLEWOODA–PALEYA DLA OPERATORÓW NIELOKALNYCH"

AUTOR ROZPRAWY: MICHAŁ GUTOWSKI

Tożsamość Hardy'ego–Steina odzwierciedla rozpraszanie się energii danej funkcji w czasie. Przez energię rozumiemy tutaj p-tą normę tej funkcji na przestrzeni L^p. Oryginalnie, tożsamość Hardy'ego–Steina została udowodniona przez Steina w jego książce [6, pp. 86–88] i dotyczyła operatora Laplace'a. Do dowodu użyto reguły łańcuchowej dla laplasjanu. Badania nad przypadkiem nielokalnej tożsamości Hardy'ego–Steina są stosunkowo nowe, a jako przykład można tu podać pracę Bañuelosa, Bogdana i Luksa [1], gdzie wyprowadzono tę tożsamość dla operatorów Lévy'ego na przestrzeni euklidesowej. Badanie tożsamości Hardy'ego–Steina może przebiegać przy użyciu metod zarówno analitycznych jak i probabilistycznych. Autorzy [1] użyli pierwszego z nich. Jako przypadek użycia w tym kontekście metod probabilistycznych, możemy wymienić pracę Bañuelosa i Kima [2], gdzie dowód opiera się o wzór Itô.

Żeby uogólnić uzyskane do tej pory wyniki, autor niniejszej rozprawy oparł się na teorii form Dirichleta. Przez regularną formę Dirichleta rozumiemy domkniętą, nieujemną, symetryczną, markowską oraz posiadającą rdzeń formę dwuliniową $\mathcal{E}(u, v)$ o dziedzinie $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, która jest gęsta w przestrzeni L^2. Warto tutaj wspomnieć, że istnieje bijekcja między klasą regularnych form Dirichleta a pewną klasą symetrycznych procesów Markowa nazywaną symetrycznymi procesami Hunta.

Jednym z kluczowych twierdzeń teorii form Dirichleta jest wzór Beurlinga–Deny, który mówi, że każda regularna forma Dirichleta ma jednoznaczny rozkład na trzy składniki: składnik silnie lokalny, składnik skokowy z miarą skoków J i składnik związany z zabijaniem z miarą zabijania k. Składniki te odzwierciedlają kolejno ciągłe, skokowe i związane z zabijaniem zachowanie się procesu Hunta powiązanego z formą Dirichleta $\mathcal{E}$. Wzór ten brzmi następująco:

$$\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}^{(c)}(u,v) + \frac{1}{2}\iint\limits_{E\times E\setminus \mathrm{diag}} (u(y)-u(x))(v(y)-v(x))\, J(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + \int\limits_E u(x)v(x)\, k(\mathrm{d}x)$$

i zachodzi dla wszystkich ciągłych (w ogólności kwaziciągłych) funkcji u i v z dziedziny $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

W niniejszej rozprawie użyto tak zwanej formy Sobolewa–Bregmana (w skrócie p-formy), która jest uogólnieniem formy Dirichleta na przestrzeń L^p, gdzie $1 < p < \infty$. Pojęcie to pojawiało się wcześniej w literaturze jedynie w kontekście czysto skokowych form Dirichleta; patrz [4, 3]. Autor rozprawy zaproponował ogólną konstrukcję p-formy używając form aproksymujących formę Dirichleta.

Jednym z głównych wyników niniejszej rozprawy jest wzór Beurlinga–Deny dla form Sobolewa–Bregmana. Najważniejszą zaletą tego wyniku jest to, iż wzór ten działa w pełnej ogólności – jest spełniony dla każdej regularnej formy Dirichleta, bez żadnych dodatkowych założeń. Przy użyciu tego wyniku, została udowodniona następująca ogólna tożsamość Hardy'ego–Steina dla dowolnej regularnej formy Dirichleta:

$$\int\limits_E |f(x)|^p\, m(\mathrm{d}x) - \lim_{T\to+\infty} \|P_T f\|_p^p = \frac{4(p-1)}{p}\int\limits_0^{+\infty} \mathcal{E}^{(c)}[(P_t f)^{\langle p/2\rangle}]\,\mathrm{d}t$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} \iint\limits_{E\times E\setminus \mathrm{diag}} F_p(P_t f(x), P_t f(y))\, J(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\mathrm{d}t + p\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_E |P_t f(x)|^p\, k(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t, \quad f \in L^p(m).$$

Tutaj, funkcja $F_p(a,b) = |b|^p - |a|^p - pa^{\langle p-1\rangle}(b-a)$ to tak zwana *dywergencja Bregmana*, natomiast $a^{\langle\gamma\rangle} = |a|^\gamma \operatorname{sgn}(a)$ oznacza francuską potęgę. Przez operatory P_t rozumiemy półgrupę związaną z formą Dirichleta.

Kolejnym wynikiem rozprawy jest dowód spolaryzowanej tożsamości Hardy'ego–Steina dla czysto skokowych form Dirichleta oraz zbadanie własności spolaryzowanego odpowiednika p-formy.

Ostatni rozdział niniejszej rozprawy zawiera zastosowanie podejścia z prac [1, 5] i przy użyciu uzyskanych wcześniej wyników, otrzymanie oszacowań p-tych norm dla funkcji kwadratowych Littlewooda–Paleya. Aby zaadaptować podejście z wymienionych wyżej prac do bardziej ogólnego przypadku zastosowano miary Revuza i ich relację z funkcjonałami addytywnymi. Dodatkowo, w niniejszej pracy przedstawiono przykłady operatorów, dla których nie da się uzyskać oszacowania p-tych norm oraz wskazano nienaprawialny błąd z artykułu [5].

Literatura

[1] Rodrigo Bañuelos, Krzysztof Bogdan, and Tomasz Luks. Hardy–Stein identities and square functions for semigroups. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 94(2):462–478, 2016.

[2] Rodrigo Bañuelos and Daesung Kim. Hardy–Stein identity for non-symmetric Lévy processes and Fourier multipliers. *J. Math. Anal. Appl.*, 480(1):20, 2019. Id/No 123383.

[3] Krzysztof Bogdan, Tomasz Grzywny, Katarzyna Pietruska-Pałuba, and Artur Rutkowski. Nonlinear nonlocal Douglas identity. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 62(5):31, 2023. Id/No 151.

[4] Krzysztof Bogdan, Tomasz Jakubowski, Julia Lenczewska, and Katarzyna Pietruska-Pałuba. Optimal Hardy inequality for the fractional Laplacian on L^p. *J. Funct. Anal.*, 282(8):31, 2022. Id/No 109395.

[5] Huaiqian Li and Jian Wang. Littlewood-Paley-Stein estimates for non-local Dirichlet forms. *J. Anal. Math.*, 143(2):401–434, 2021.

[6] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 30 of *Princeton Math. Ser.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.