

## **Abstract of a doctoral dissertation**

### **„Fractional Sobolev spaces and Hardy inequalities”**

**author: Michał Kijaczko**

The doctoral thesis titled "Fractional Sobolev Spaces and Hardy Inequalities" addresses the subject matter related to the broadly understood fractional Sobolev spaces. These spaces are an interesting object of study in modern mathematics due to their wide range of applications in describing problems for which classical methods of mathematics and physics are insufficient. These include, among others, partial differential equations for nonlocal operators, the theory of stochastic processes, in particular Lévy processes, Dirichlet forms, and diffusions. Fractional Sobolev spaces play a similar role in these problems as classical Sobolev spaces do in local (nonfractional) problems.

The doctoral thesis consists of four thematically related articles with the following titles: "On density of smooth functions in weighted fractional Sobolev spaces," "On density of compactly supported smooth functions in fractional Sobolev spaces," "Fractional Sobolev spaces with power weights," and "Sharp Hardy inequalities for Sobolev-Bregman forms." These articles have been published or accepted in scientific journals, namely *Nonlinear Analysis*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, and *Mathematische Nachrichten*. Three of them are co-authored, while one is written by one author. The first three articles address topics such as the density of smooth functions and compactly supported smooth functions in fractional Sobolev spaces, often equipped with additional weights. The obtained results provide answers to questions regarding when both of the mentioned classes of functions are or are not dense in the corresponding spaces. We present, among other things, necessary and sufficient conditions for smooth functions with compact support to be dense or not dense in the analyzed spaces. We also provide explicit formulae for the closure of the considered classes of functions in the corresponding Sobolev space. Many of the obtained theorems generalize previously partially known results. The proof techniques employed are nontrivial and rely on advanced methods of analysis and geometry, such as Whitney decomposition or properties of uniform domains. In the final work, inequalities for the so-called Sobolev-Bregman forms were proven, which fit into the broadly understood theory of Hardy-type inequalities. Hardy inequalities play a crucial role in the analysis and theory of differential equations, while Sobolev-Bregman forms have recently attracted interest due to their connections with the properties of the fractional Laplace operator in  $L^p$  spaces.

## Streszczenie rozprawy doktorskiej

### pt. „Ułamkowe przestrzenie Sobolewa i nierówności Hardy’ego”

autor rozprawy: Michał Kijaczko

W rozprawie doktorskiej „Ułamkowe przestrzenie Sobolewa i nierówności Hardy’ego” podjęta została tematyka powiązana z szeroko rozumianymi przestrzeniami typu Sobolewa rzędu ułamkowego. Przestrzenie te są ciekawym obiektem badań współczesnej matematyki, ze względu na duże pole zastosowań do opisu problemów, dla których klasyczne metody matematyki i fizyki nie są wystarczające. Są to między innymi równania różniczkowe cząstkowe dla operatorów o charakterze nielokalnym, teoria procesów stochastycznych, w szczególności procesów Lévy’ego, form Dirichleta czy dyfuzji. Ułamkowe przestrzenie Sobolewa odgrywają w tych zagadnieniach podobną rolę, jak klasyczne przestrzenie Sobolewa w zagadnieniach natury lokalnej (nieułamkowej).

Rozprawa doktorska składa się z czterech powiązanych ze sobą tematycznie artykułów o następujących tytułach: „On density of smooth functions in weighted fractional Sobolev spaces”, „On density of compactly supported smooth functions in fractional Sobolev spaces”, „Fractional Sobolev spaces with power weights” oraz „Sharp Hardy inequalities for Sobolev–Bregman forms”, opublikowanych lub zaakceptowanych w czasopismach naukowych (Nonlinear Analysis, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa oraz Mathematische Nachrichten). Trzy z nich są współautorskie, a jeden jest samodzielny. W trzech pierwszych artykułach poruszone są takie zagadnienia jak gęstość funkcji gładkich i funkcji gładkich o nośniku zwartym w ułamkowych przestrzeniach Sobolewa, często wyposażonych dodatkowo w wagi. Uzyskane wyniki odpowiadają na pytania, kiedy obie wymienione wyżej klasy funkcji są lub nie są gęste w odpowiednich przestrzeniach. Przedstawiamy między innymi warunki konieczne i wystarczające na to, aby funkcje gładkie o nośniku zwartym były lub nie były gęste w analizowanych przestrzeniach, a także podajemy jawne wzory na postać domknięcia zbioru rozważanych klas funkcji w odpowiedniej przestrzeni Sobolewa. Wiele z otrzymanych twierdzeń uogólnia te, które dotychczas znane były tylko częściowo. Wykorzystywane techniki dowodowe są nietrywialne i bazują na zaawansowanych metodach analizy i geometrii, takich jak rozkłady Whitneya czy własności zbiorów jednostajnych. W ostatniej pracy udowodnione zostały nierówności dla tzw. form Sobolewa–Bregmana, wpisujące się w szeroko pojętą teorię nierówności typu Hardy’ego. Nierówności Hardy’ego pełnią bardzo ważną rolę w analizie i teorii równań różniczkowych, a formy Sobolewa–Bregmana w ostatnich latach stały się obiektem zainteresowania, ze względu na ich powiązania z własnościami ułamkowego operatora Laplace’a w przestrzeniach  $L^p$ .