Abstract of a doctoral dissertation

„Nonautonomous Linear Differential Equations with Delays and Skew-product Dynamical Systems”

author: Marek Piotr Kryspin

Differential equations, both ordinary and partial, have repeatedly proven to be effective tools in the study of various natural, physical, and biological phenomena. Sometimes there is a certain delay between the stimulus and the response. For example, in ecological models, new organisms need time to mature. Hutchinson noted that some negative effects caused by a population may affect the birth rate in later generations. These observations, among others, lead to the theory of delay differential equations, which give rise to models used to describe, among other things: control issues, elasticity theory, and economic problems. For instance, the Mackey-Glass equation models the amount of carbon dioxide levels in the blood. Brunovsky and others model the value of currency using delay differential equations. Moreover, ordinary delay differential equations can appear in quite unexpected places, such as in the study of some problems in number theory related to the distribution of prime numbers (as in E. M. Wright's 1955 work). However, it seems that mathematical ecology is the field where models based on delay differential equations have achieved the greatest success.

This dissertation presents the results achieved in collaboration with Janusz Mierczyński, Sylvia Novo, and Rafael Obaya. Chapters 3 and 4 contain theorems concerning the continuous dependence of mild solutions of nonautonomous parabolic partial differential equations with delay (constant or varying) on parameters. Additionally, Chapter 3 presents theorems showing that solutions of equations with initial conditions in Lp will, after a sufficiently long time, take values in Lq (for q>p). In other words, the solutions regularize over time, similar to the case of the heat equation. Similar results can be found in Chapter 5, but for ordinary equations, however with a much more general type of delay, specified by an integral.

The results from Chapters 3, 4, and 5 can be summarized as follows: small changes in initial conditions and/or parameters of the equation do not significantly affect the solution.

One of the breakthrough achievements in the study of nonautonomous ordinary differential equations was the application, in the 1960s and 70s, by mathematicians such as R. K. Miller, R. J. Sacker, G. R. Sell, R. A. Johnson, V. M. Millionshchikov, K. J. Palmer, of the concept of skew-product dynamical systems, originally introduced by H. Anzai in 1951. The idea of skew-products was extended to partial differential equations (with or without delay) thanks to the efforts of S.-N. Chow, D. N. Cheban, K. Lu, J. Mallet-Paret, J. Mierczyński, S. Novo, R. Obaya, A. Sanz, W. Shen, Y. Yi, and others.

Chapters 6 and 7 present results concerning skew-product dynamical systems. Chapter 6 shows under what assumptions space decompositions (Oseledets splitting) can be transferred to Banach spaces embedded in a continuous manner. Chapter 7 partially uses these results to show exponential separation in the space of continuous functions transferred from Lp and determines the Lyapunov exponents of these systems.

Streszczenie rozprawy doktorskiej

pt. „ Nieautonomiczne równania różniczkowe liniowe z opóźnieniem i układy dynamiczne typu produktu skośnego”

Marek Piotr Kryspin

Równania różniczkowe, zarówno zwyczajne, jak i cząstkowe, wielokrotnie okazały się skutecznym narzędziem w badaniu różnych zjawisk naturalnych/fizycznych/biologicznych. Czasami między bodźcem a reakcją występuje pewne opóźnienie. Na przykład w modelach ekologicznych nowe organizmy potrzebują czasu na dojrzewanie. Hutchinson zauważył, że niektóre negatywne skutki spowodowane przez populację mogą wpłynąć na wskaźnik urodzeń w późniejszych pokoleniach.

Obserwacje te między innymi prowadzą do teorii równań różniczkowych z opóźnieniem, które dają początek modelom służącym do opisu, między innymi: zagadnień sterowania, teorii elastyczności, problemów ekonomii. Przykładowo, równanie Mackey-Glassa modeluje kontrolę poziomu dwutlenku węgla we krwi. Brunovský i inni modelują wartość waluty z wykorzystaniem opóźnionych równań różniczkowych. Ponadto, równania różniczkowe zwyczajne z opóźnieniem mogą pojawić się w dość nieoczekiwanych miejscach, na przykład podczas badania niektórych problemów w teorii liczb związanych z rozkładem liczb pierwszych (tak jak w pracy z 1955 roku autorstwa E. M. Wrighta). Wydaje się jednak, że ekologia matematyczna jest dziedziną, w której modele oparte o równania różniczkowe z opóźnieniem odniosły największy sukces.

W rozprawie przedstawione zostały wyniki osiągnięte we współpracy z Januszem Mierczyńskim, Sylvią Novo oraz Rafaelem Obayą. Rozdziały 3 i 4 zawierają twierdzenia dotyczące ciągłej zależności rozwiązań typu mild nieautonomicznych równań różniczkowych cząstkowych parabolicznych z opóźnieniem (stałym lub zmiennym) od parametrów. Ponadto, w rozdziale 3 przedstawiono twierdzenia ukazujące, iż rozwiązania równań z warunkiem początkowym o wartościach w Lp po odpowiednio długim czasie przyjmą wartości w Lq (dla q>p). Innymi słowy rozwiązania regularyzują się w czasie, podobnie jak ma to miejsce w przypadku równania ciepła. Podobne wyniki można znaleźć w rozdziale 5, ale dla równań zwyczajnych, jednak ze znacznie ogólniejszym typem opóźnienia, bo zadanego za pomocą całki.

Wyniki z rozdziałów 3, 4 oraz 5 można podsumować stwierdzeniem: niewielkie zmiany warunków początkowych i/lub parametrów równania nie wpływają znacząco na rozwiązanie.

Jednym z przełomowych osiągnięć w badaniu nieautonomicznych równań różniczkowych zwyczajnych było zastosowanie w latach 60. i 70. XX wieku przez matematyków takich jak m.in. R. K. Miller, R. J. Sacker, G. R. Sell, R. A. Johnson, V. M. Millionshchikov, K. J. Palmer, koncepcji układu dynamicznego typu produktu skośnego, pierwotnie wprowadzonej przez H. Anzaia w 1951 roku. Ideę produktów skośnych rozszerzono na równania różniczkowe cząstkowe (z opóźnieniem lub bez) dzięki wysiłkom m. in. S.-N. Chow, D. N. Chebana, K. Lu, J. Mallet-Paret, J. Mierczyńskiego, S. Novo, R. Obayi, A. Sanz, W. Shen, Y. Yi i innych.

W rozdziale 6 oraz 7 przedstawiono wyniki dotyczące układów dynamicznych typu produktu skośnego. W rozdziale 6 pokazano przy jakich założeniach dekompozycje przestrzeni (rozkład Oseledetsa) można przenieść na przestrzenie Banacha zanurzone w ciągły sposób. W rozdziale 7 częściowo wykorzystano te wyniki do pokazania separacji wykładniczej na przestrzeni funkcji ciągłych przeniesionej z Lp oraz wyznaczono wykładniki Lapunowa tych układów.