Niesymetryczne procesy Lévy'ego na prostej rzeczywistej

Łukasz Leżaj

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Przedmiotem niniejszej rozprawy doktorskiej są niesymetryczne procesy Lévy'ego na prostej rzeczywistej. Podstawowym obiektem naszych badań jest gęstość przejścia dla procesu Lévy'ego, zwana także *jądrem ciepła* z powodu rozwiązywania przy pewnych założeniach uogólnionego równania ciepła. Pierwszym celem tej dysertacji jest uzyskanie oszacowań gęstości przejścia dla jednowymiarowych niesymetrycznych procesów Lévy'ego i temu zagadnieniu poświęcony jest rozdział 3, gdzie analizowaną klasą procesów są subordynatory. Punktem wyjścia naszych rozważań jest wykładnik Laplace'a subordynatora i to w jego języku formułowane są wszystkie założenia. Pierwszym wynikiem tego rozdziału jest asymptotyczne zachowanie gęstości przejścia subordynatora $\mathbf{T} = (T_t\colon t \geq 0)$ przy założeniu dolnego skalowania na (minus) drugą pochodną wykładnika Laplace'a z wykładnikiem skalowania $\alpha - 2$, gdzie $\alpha > 0$. Warto tutaj zauważyć, że jest to jedyne założenie, a w szczególności nie zakładamy absolutnej ciągłości miary Lévy'ego ν. Pozostała część rozdziału 3 poświęcona jest górnym i dolnym oszacowaniom z głownym wynikiem dającym ostre dwustronne oszacowania na gęstość przejścia przy założeniu górnych i dolnych skalowań na wykładnik Laplace'a. W szczególności, jeśli skalowania są globalne to uzyskane oszacowanie również jest globlane zarówno w czasie jak i przestrzeni. Na końcu rozdziału zaprezentowane są dwa przykłady zastosowania uzyskanych wyników, tj. subordynacja poza standardową przestrzenią $\mathbb{R}^d$ oraz ostre oszacowania na funkcję Greena dla subordynatora T_t.

Metoda opracowana w rozdziale 3 może być zastosowana również do innych jednowymiarowych procesów Lévy'ego, jeśli tylko transformata Laplace'a istnieje i jest dobrze zdefiniowana na prawej półpłaszczyźnie zaspolonej. W dużej mierze korzystamy z tego w rozdziale 4, gdzie ta sama technika zastosowana jest do jednowymiarowych spektralnie dodatnich procesów Lévy'ego, ponieważ w tym przypadku istnienie transformaty Laplace'a jest konsenwencją jednostronnych skoków procesu. Z racji tego, że metoda rozwinięta w rozdziale 3 zastosowana jest niemal w tej samej formie również w rozdziale 4, jego struktura i treść wykazują wiele podobieństw do wyników i dowodów zaprezentowanych w rozdziale 3. Tak więc, asymptotyka gęstości przejścia spektralnie dodatnich procesów Lévy'ego oraz jej dowód idą tym samym torem co dowód analogicznego twierdzenia w rozdziale 3. Górne i dolne oszacowania, jak również ostre dwustronne oszacowania gęstości przejścia także mają swoje odpowiedniki. Rodział zakończony jest przykładem zastosowania powyższych wyników dla spektralnie dodatniego α-stabilnego procesu Lévy'ego.

Rozdział 5 poświęcony jest analizie czasu pierwszego trafienia w zbiór zwarty i nasze podejście opiera się głównie na teorii potencjału zamiast na technikach analitycznych. W przeciwieństwie do poprzednich rozdziałów, stosujemy tutaj metodę *kontroli asymetrii* poprzez narzucenie globalnego skalowania w większości naszych rozumowań. Obowiązującym w całym rozdziale założeniem jest całkowalność w nieskończoności odwrotności części rzeczywistej wykładnika charakterystycznego procesu. U podstaw naszych rozważań w tym rozdziale leży dość ulotna relacja pomiędzy dwoma wersjami kompensacji jądra potencjału: klasyczną oraz zsymetryzowaną. Mianowicie okazuje się, że pierwsza z nich jest właściwym obiektem opisującym asymptotyczne zachowanie czasu pierwszego trafienia, lecz jej istotną wadą jest fakt, że nie wiemy *a priori*, czy w ogóle jest dobrze zdefiniowana, podczas gdy druga co prawda jest dobrze zdefiniowana, ale jej zastosowania ograniczają się jedynie do opisania oszacowań czasu trafienia. Pierwszym wynikiem tego rozdziału jest asymptotyka czasu pierwszego trafienia w zbiór zwarty, a klasa procesów, które spełniają jego założenia to między innymi wszystkie procesy symetryczne, stabilne oraz spektralnie jednostronne z regularnie zmieniającym się wykładnikiem charakterystycznym. W celu otrzymania ostrych dwustronnych oszacowań czasu pierwszego trafienia najpierw dowodzimy globalnej, niezmienniczej na skalę nierówności Harnacka.

Warto odnotować, że nie zakładamy tutaj absolutnej ciągłości miary Lévy'ego. Nierówność Harnacka jest następnie zastosowana w celu uzyskania ostrych dwustronnych oszacowań czasu pierwszego trafienia w zbiór zwarty. Prezentujemy również dużą klasę procesów Lévy'ego, które spełniają założenia tego twierdzenia. Ponadto stosując wyniki uzyskane niedawno przez Grzywnego jesteśmy w stanie udowodnić analogiczny wynik w przypadku, gdy proces jest spektralnie jednostronny.

Większość materiału przygotowawczego, włącznie z notacją i wprowadzeniem podstawowych obiektów i ich własności, jest zaprezentowana w rozdziale 2. Rozdział 1 natomiast zawiera wstęp do rozprawy z opisem najważniejszych wyników i założeń, przy jakich są one uzyskane.

Non-symmetric Lévy processes on the real line

Łukasz Leżaj

Summary of the doctoral dissertation

The objectives of our studies in this dissertation are non-symmetric Lévy processes on the real line. The primary object of our studies is the transition density of the Lévy process known also as the *heat kernel* due to the fact that under certain assumptions it solves the generalised heat equation. Our first goal in this dissertation is to establish estimates for the case of one-dimensional non-symmetric Lévy processes with subordinators as our first target in Chapter 3. The starting point of our considerations is the Laplace exponent of a subordinator and all assumptions are formulated by means of this object. Our first result is the asymptotic behaviour of the transition density of a subordinator $\mathbf{T} = (T_t : t \geq 0)$ under the assumption of the lower scaling property with the scaling index $\alpha - 2$, where $\alpha > 0$, imposed on the (minus) second derivative of the Laplace exponent. We note here that this is the only assumption and in particular, we do not assume the absolute continuity of the Lévy measure. The remaining part of Chapter 3 is devoted to upper and lower estimates with the main result which provides sharp two-sided estimates on the transition density under the assumption of lower and upper scaling property on the Laplace exponent. In particular, if the scalings are global then the obtained estimate is also global in space and in time. The chapter is concluded with two examples of applications of our results, i.e. the subordination beyond the classical $\mathbb{R}^d$ setting and sharp two-sided estimate on the Green function of the subordinator T_t.

The method invented in Chapter 3 may be applied also to other one-dimensional Lévy processes, provided that their Laplace transform exists and is well defined on the right complex half-plane. We largely profit from that in Chapter 4 where the same technique is successfully applied to the spectrally one-sided Lévy processes, since in that case the existence of the Laplace transform is a consequence of the restriction on the process to jump only forward. Due to the fact that the method developed in Chapter 3 is applied almost in the same form in Chapter 4, its structure and content displays significant similarities to the results and proofs obtained for subordinators. So, the asymptotic behaviour of the transition density of spectrally positive Lévy processes as well as its proof follows the idea of the proof of the analogous theorem in Chapter 3. Upper and lower estimates as well as sharp two-sided estimates also have their counterparts. We end that chapter with an example of application of the above results for the spectrally positive α-stable Lévy process.

Chapter 5 is devoted to the analysis of the first hitting time of a point and a compact set and here our approach is based mainly on the potential theory rather than on analytic techniques. Contrary to previous chapters, here we adopt a method of *controlling the non-symmetry* by imposing the global scaling condition in most of our reasonings. The standing assumption in this part is the integrability at infinity of the reciprocal of the real part of the characteristic exponent of a process. On the foundations of our considerations lies a rather elusive interplay between two different versions of compensated potential kernel: classical and symmetrised. Namely, it turns out that the first one is appropriate to describe the asymptotic behaviour of the first hitting time but its serious drawback is the fact that we do not a priori know if it exists, while the other is well defined in our setting but its applications are limited to the estimates rather than asymptotics. The first result of that chapter is the asymptotic behaviour of the first hitting time of a compact set and a class of processes which satisfy its assumptions are *inter alia* all symmetric, stable and spectrally one-sided Lévy processes with the regularly varying characteristic exponent. In order to obtain sharp estimates on the first hitting time we first prove the global scale-invariant Harnack inequality. We note that here we do not assume the absolute continuity of the Lévy measure. The Harnack inequality is then applied to obtain sharp two-sided estimates on the first hitting time of a compact set. We also provide a large class of Lévy processes which satisfy the assumptions of this theorem. Moreover, using recent

results by Grzywny we are able to prove the analogous result for spectrally negative Lévy processes.

Most of the preliminary material, including the notation setting and the introduction of basic objects and its properties, is presented in Chapter 2, while Chapter 1 contains the introduction to the dissertation, description of main results and a discussion about the imposed assumptions.