

## SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

### *Probability of ruin in the model of collaborating insurance companies.*

This dissertation deals with the problem of ruin probability for a two-dimensional insurer-reinsurer risk process. A proportional reinsurance model applies to a situation where claims are divided according to a predetermined proportion between two insurance companies (the insurer and the reinsurer). The aim of the dissertation is to generalize ruin probability results for the classical risk model to the case of two insurance companies collaborating under a proportional reinsurance contract. The main results of this work are two explicit formulas for determining the probability of ruin and two practical universal approximations. The first explicit formula relates to the case where the claims are from an exponential distribution. The second obtained result applies to the case when the claims are described by a phase-type distribution for which there are real solutions of the Lundberg equation. The first of the proposed approximations is based on De Vylder's idea, while the second one is based on the concept of diffusion approximation. The accuracy of the results is analyzed numerically. The performed analysis confirms correctness of the formulas and satisfactory accuracy of approximations proposed in the dissertation, and a possibility of their application in practice.

The structure of the dissertation is as follows. The first chapter presents the notions used in the work. We present light- and heavy-tailed distributions, with particular emphasis on phase-type distributions. In addition, we describe the methods of fitting the distribution to the data, tests of the goodness of fit, and the processes used in modeling the loss occurrences. In the second chapter, the classical risk process is defined and the results important from the point of view of this dissertation are presented, namely an explicit formula for the probability of ruin for losses from exponential and phase-type distributions, as well as De Vylder and diffusion approximations. In the third chapter, we formally define the insurer-reinsurer model that is of our interest. We also present the main results of the dissertation, i.e. explicit formulas for the probability of ruin (for losses from exponential distribution and from phase-type distribution, for which there are real solutions of the Lundberg equation) and approximations for the case of the considered proportional reinsurance (De Vylder's type and diffusion). The fourth chapter is of an application nature. We present the application of the analyzed model to real loss data from a Polish insurance company. For the data, we fit the probability distributions to the loss amounts and we model the moments of their occurrence. We illustrate the analytical formula for phase-type distributions and test the quality of the proposed approximations by determining the estimation errors with respect to the results obtained by the Monte Carlo method. The results of the conducted analyzes are promising from the practical point of view. The results presented in the dissertation have already been partially published or are used in a paper prepared to be submitted for review.

Aleksandra Wilkowska

## STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

### *Prawdopodobieństwo ruiny w modelu powiązanych firm ubezpieczeniowych*

Niniejsza rozprawa dotyczy zagadnienia prawdopodobieństwa ruiny w dwuwymiarowym procesie ryzyka ubezpieczyciel-reasekurator. Model reasekuracji proporcjonalnej dotyczy sytuacji, gdy szkody dzielone są według zadanej proporcji pomiędzy dwie firmy ubezpieczeniowe (ubezpieczyciela i reasekuratora). Celem rozprawy jest uogólnienie wyników na prawdopodobieństwo ruiny dla klasycznego modelu ryzyka dla sytuacji dwóch firm związanych reasekuracją proporcjonalną. Głównymi wynikami niniejszej pracy są dwa jawne wzory do wyznaczenia wartości prawdopodobieństwa ruiny oraz dwie uniwersalne aproksymacje o zastosowaniu aplikacyjnym. Pierwszy jawny wzór odnosi się do przypadku, gdy szkody pochodzą z rozkładu wykładniczego. Drugi uzyskany wynik tyczy się przypadku, gdy szkody opisane są rozkładem fazowym, dla którego istnieją rzeczywiste rozwiązania równania Lundberga. Pierwsza z zaproponowanych aproksymacji opiera się na idei De Vyldera, natomiast druga jest oparta na koncepcji aproksymacji dyfuzyjnej. Dokładność wyników przeanalizowano numerycznie. Przeprowadzona analiza potwierdza poprawność wyprowadzonych w rozprawie wzorów i satysfakcjonującą jakość aproksymacji oraz możliwość ich zastosowania w praktyce.

Struktura rozprawy jest następująca. W pierwszym rozdziale przytoczone są pojęcia wykorzystywane w pracy. Przedstawiamy rozkłady lekko- i ciężkoogonowe, ze szczególnym uwzględnieniem rozkładów fazowych. Ponadto, opisujemy metody dopasowania rozkładu do danych, testy jakości dopasowania oraz procesy używane w modelowaniu momentów pojawiania się szkód. W rozdziale drugim zdefiniowany jest klasyczny proces ryzyka oraz zaprezentowane są ważne z punktu widzenia niniejszej rozprawy znane z literatury wyniki dla tego modelu - jawny wzór na prawdopodobieństwo ruiny dla szkód z rozkładu wykładniczego i fazowego, a także aproksymacje: typu De Vyldera i dyfuzyjna. W rozdziale trzecim definiujemy formalnie interesujący nas model ubezpieczyciel-reasekurator. Przedstawiamy także główne wyniki rozprawy, czyli jawne wzory na prawdopodobieństwo ruiny (dla szkód z rozkładu wykładniczego oraz szkód z rozkładu fazowego, dla którego istnieją rzeczywiste rozwiązania równania Lundberga) oraz ich aproksymacje dla przypadku rozważanej reasekuracji proporcjonalnej (typu De Vyldera i dyfuzyjną). Rozdział czwarty ma charakter aplikacyjny. Prezentujemy w nim zastosowanie analizowanego modelu do rzeczywistych danych szkodowych pochodzących z polskiej firmy ubezpieczeniowej. Dla danych dobieramy rozkład prawdopodobieństwa do wielkości pojawiających się szkód oraz modelujemy momenty ich występowania. Ilustrujemy uzyskany analityczny wzór dla różnych rozkładów fazowych oraz badamy dokładność zaproponowanych przybliżeń wyznaczając błędy oszacowań w odniesieniu do wyników uzyskanych metodą Monte Carlo. Rezultaty prowadzonych analiz są obiecujące z punktu widzenia praktycznego. Wyniki przedstawione w rozprawie zostały już częściowo opublikowane lub są wykorzystane w pracy przygotowanej do wysłania do recenzji.

Aleksandra Wilkowska