

Summary of the doctoral dissertation
**„Cyclostationary processes with additive noise –
finite- and infinite-variance case”**

author: Wojciech Żuławiński

This thesis is devoted to cyclostationary processes, that is, a class of non-stationary stochastic processes for which certain assumed statistical characteristics vary periodically. Because the concepts of periodicity and randomness are ubiquitous, these processes have found applications in various fields. This thesis extends the theory of cyclostationary processes by considering selected non-standard cases that have not yet been analyzed in the literature.

The primary focus is on cyclostationary processes with additive noise, considering both finite- and infinite-variance cases. Such models can be useful for the analysis of real data containing additional disturbances or outlying observations, which make identifying the underlying periodic structure more difficult. For these processes, new theoretical contributions are presented, with a special emphasis on new methods for the practical application of these models to real data analysis.

The thesis is structured as follows. Chapter 1 is the introduction, where the considered problem and main research hypotheses are formulated. Chapter 2 contains an overview of the state of the art in the analysis of cyclostationary processes and other considered fields. In addition, the author's original contributions to this research area and his scientific achievements are listed.

In Chapter 3, the most important information on finite-variance cyclostationary processes is recalled. The classical theory is mainly devoted to weakly cyclostationary (or periodically correlated, PC) processes for which the mean and autocovariance functions are periodic. This chapter also contains a section devoted to the frequency domain analysis of these processes, including the description of selected methods (cyclic spectral coherence, coherent/incoherent statistics) that will be further extended.

Chapter 4 covers selected topics related to cyclostationary processes with infinite-variance. Before they are introduced, alpha-stable distributions are first described (other heavy-tailed distributions considered in this thesis are presented in Appendix A). Moreover, selected dependence measures (NCV, FLOC) that are well defined for infinite-variance cases are presented. These measures are used in the presented definitions of infinite-variance cyclostationary processes, since the classical definition of PC processes cannot be used (because the autocovariance is not well defined).

Chapter 5 is devoted to the periodic autoregressive (PAR) model with additive noise in finite-variance case. In this chapter, first original contributions of this thesis are presented. For the considered model, Yule-Walker equations and properties of residuals are derived. These results are then used to propose a set of new methods dedicated to the analyzed model, i.e., the parameters estimation methods, the procedures for identification (order and period selection) and validation of the model, and the method for testing of the additive noise presence. The proposed techniques are further analyzed in Chapter 6, where their performance is studied using Monte Carlo simulations. The results indicate their high efficiency.

Chapter 7 focuses on the infinite-variance case of PAR model with additive noise. For the considered model, the Yule-Walker equations based on NCV and FLOC measures are derived. These results are then used to propose new methods for estimating the parameters and testing of the additive noise presence, which are adaptations of the procedures introduced in Chapter 5 for the finite-variance case. Chapter 7 also contains a novelty for the infinite-variance PAR model (without additive noise), for which the periodic partial NCV and periodic partial FLOC are introduced as new

tools for identifying the order of this model. All methods proposed in Chapter 7 are validated in the simulation studies presented in Chapter 8.

In Chapter 9, the problem of periodicity detection for general cyclostationary processes is considered. The main focus is put on identifying the cyclic behavior in signals with outliers. For this purpose, new methods are proposed that are robust modifications of the classical approaches, i.e. robust cyclic spectral coherence and robust coherent/incoherent statistics. Based on the latter, a period estimation procedure is also introduced. The proposed methods are further analyzed in Chapter 10, where they are compared with the corresponding classical approaches using simulated and real signals (from the field of condition monitoring). The results show a great advantage of the novel approaches.

Chapter 11 concludes the thesis. The presented work is summarized and the research hypotheses stated at the beginning of the thesis are addressed.

Streszczenie rozprawy doktorskiej

pt. „Cyclostationary processes with additive noise – finite- and infinite-variance case”

autor rozprawy: Wojciech Żuławiński

Niniejsza rozprawa poświęcona jest procesom cyklostacjonarnym, tj. klasie niestacjonarnych procesów stochastycznych, dla których pewne założone statystyczne charakterystyki zmieniają się okresowo w czasie. Ponieważ pojęcia okresowości i losowości są wszechobecne, procesy te znalazły zastosowanie w rozmaitych dziedzinach. Niniejsza rozprawa rozszerza teorię dotyczącą procesów cyklostacjonarnych poprzez rozważenie wybranych niestandardowych przypadków, które nie były wcześniej analizowane.

Główny nacisk położony jest na procesy cyklostacjonarne z szumem addytywnym, biorąc pod uwagę zarówno przypadek skończonej jak i nieskończonej wariancji. Modele te mogą być użyteczne w analizie danych zawierających dodatkowe zakłócenia lub obserwacje odstające, które utrudniają identyfikację okresowej struktury. Dla tych procesów przedstawione są nowe wyniki teoretyczne, ze szczególnym naciskiem na nowe metody praktycznego zastosowania tych modeli do analizy danych rzeczywistych.

Niniejsza rozprawa ma następującą strukturę. Rozdział 1 stanowi wstęp, w którym sformułowano rozważany problem oraz główne hipotezy badawcze. Rozdział 2 zawiera przegląd literatury poświęconej procesom cyklostacjonarnym oraz innym rozważanym obszarom. Ponadto opisany został wkład autora w rozwój tej dziedziny badań, a także jego dorobek naukowy.

Rozdział 3 stanowi przypomnienie najważniejszych informacji dotyczących cyklostacjonarności w przypadku skończonej wariancji. Klasyczna teoria poświęcona jest głównie procesom cyklostacjonarnym w słabym sensie (inaczej okresowo skorelowanym, PC), dla których funkcje średniej oraz autokowariancji są okresowe. Rozdział ten zawiera również część poświęconą analizie tych procesów w dziedzinie częstotliwości, w tym opis wybranych metod (cykliczna koherencja spektralna, statystyki koherentne/niekoherentne), które będą rozszerzane w dalszej części rozprawy.

Rozdział 4 obejmuje wybrane tematy związane z procesami cyklostacjonarnymi z nieskończoną wariancją. Przed ich wprowadzeniem, opisane są rozkłady alfa-stabilne (inne ciężkoogonowe rozkłady wykorzystywane w rozprawie opisane są w Dodatku A). Ponadto przedstawione są wybrane miary zależności (NCV, FLOC) zdefiniowane dla przypadków z nieskończoną wariancją. Miary te wykorzystywane są w przedstawionych definicjach procesów cyklostacjonarnych z nieskończoną wariancją – w tym przypadku nie można użyć klasycznej definicji procesów PC (autokowariancja nie jest zdefiniowana).

Rozdział 5 poświęcony jest okresowemu modelowi autoregresyjnemu (PAR) z szumem addytywnym i skończoną wariancją. Zawarte są w nim pierwsze autorskie wyniki przedstawione w niniejszej rozprawie. Dla rozpatrywanego modelu wyprowadzone są równania Yule'a-Walkera oraz własności residuów. Na podstawie tych wyników, zaproponowany jest szereg metod poświęconych analizowanemu modelowi, tj. metody estymacji parametrów, identyfikacji (wyboru rzędu oraz okresu) i walidacji modelu, a także testowania obecności szumu addytywnego. Proponowane metody są analizowane w rozdziale 6 przy użyciu symulacji Monte Carlo. Wyniki przeprowadzonych eksperymentów wskazują na ich wysoką efektywność.

W rozdziale 7 analizowany jest model PAR z szumem addytywnym w przypadku nieskończonej wariancji. Dla tego modelu wyprowadzone są równania Yule'a-Walkera bazujące na miarach NCV oraz FLOC. W oparciu o te wyniki, zaproponowane są nowe metody do estymacji parametrów oraz

testowania obecności szumu addytywnego będące modyfikacjami procedur zaproponowanych w rozdziale 5 dla przypadku skończonej wariancji. Rozdział 7 zawiera również nowe wyniki dla modelu PAR z nieskończoną wariancją (bez szumu addytywnego), dla którego zaproponowano miary okresowego częściowego NCV oraz okresowego częściowego FLOC jako nowe narzędzia służące do identyfikacji rzędu modelu. Wszystkie metody zaproponowane w rozdziale 7 są sprawdzone symulacyjnie w rozdziale 8.

Rozdział 9 poświęcony jest problemowi wykrywania okresowości dla ogólnych procesów cyklostacjonarnych. Przedmiotem szczególnego zainteresowania jest identyfikacja cyklicznego zachowania w sygnałach z obserwacjami odstającymi. W tym celu opracowane są nowe metody będące odpornymi modyfikacjami klasycznych podejść, tj. odporna cykliczna koherencja spektralna i odporne statystyki koherentne/niekoherentne. W oparciu o te ostatnie, opracowana jest także procedura estymacji okresu. Rozdział 10 zawiera porównanie nowych metod z klasycznymi przy użyciu sygnałów symulowanych i rzeczywistych (z obszaru monitorowania stanu). Wyniki wskazują na wyraźną przewagę proponowanych podejść.

Rozdział 11 kończy rozprawę. Podsumowano w nim przedstawione wyniki i odniesiono się do hipotez badawczych postawionych na początku rozprawy.