

## *Summary of doctoral dissertation entitled "Dependence structure analysis for two-dimensional autoregressive model with $\alpha$ -stable noise"*

In this dissertation, we examine the spatio-temporal dependence structure for the two-dimensional autoregressive model of order 1 with  $\alpha$ -stable noise. To describe the relation between the components of the model, the concepts of the cross-covariation and the cross-codifference were introduced, which generalize the auto-covariation and the auto-codifference used to quantify the dependence of the one-dimensional stochastic process with  $\alpha$ -stable distribution. The main results presented in the dissertation concern the asymptotic behavior of the codifference and the covariation applied to describe the dependence in time for the spatial components of the analyzed two-dimensional model. The asymptotic behavior of the dependence measures was investigated for the model with time-constant coefficients and for the model with time-periodic coefficients for which the relationship between the spatial components results only from the dependence of the marginals of the two-dimensional  $\alpha$ -stable noise. For both models, the asymptotic relationship between the codifference and the covariation (in the auto and cross versions) was examined and it was shown that the results obtained in the case of the two-dimensional model generalize analogous results known in the literature concerning the one-dimensional autoregressive model of 1 with  $\alpha$ -stable noise. The theoretical results presented in the dissertation were numerically verified using Monte Carlo simulations.

The first chapter presents an overview of the literature on autoregressive models,  $\alpha$ -stable distributions, and measures that can be used to describe the dependence for stochastic processes with  $\alpha$ -stable distributions.

The second chapter concerns the basic concepts related to the noise in the autoregressive model under consideration. We present the definitions of one-dimensional and multivariate  $\alpha$ -stable distribution, covariance, covariation, and codifference. The concept of the cross-covariation and the cross-codifference has been introduced in this chapter.

The third chapter is devoted to the presentation of the results regarding the one-dimensional autoregressive time series of order 1 with  $\alpha$ -stable noise, which is known in the literature. For this model, in the case of time-constant and time-periodic coefficients, the form of the solution of the corresponding autoregressive equation, the auto-dependence measures, and the theorem concerning the asymptotic relation between the auto-codifference and the auto-covariation are presented.

The fourth chapter presents the main results of the dissertation. For the two-dimensional autoregressive model of order of 1 with  $\alpha$ -stable noise, the form of the solution for the corresponding system of autoregressive equations was presented and the measures of temporal-spatial dependence were determined. Then, the asymptotic behavior of the dependence measures was investigated for the model with time-constant and time-periodic coefficients. In both cases, theorems concerning the asymptotic relation between codifference and covariation (in the auto and cross versions) were formulated, which generalize the results obtained for the one-dimensional model. They are presented in Theorem 4.1 and Theorem 4.5, for the model with time-constant and time-periodic coefficients, respectively.

In the fifth chapter, the obtained results were verified numerically by comparing the analytical formulas concerning the spatio-temporal dependence measures with their empirical counterparts obtained on the basis of simulated trajectories. The graphs also present the asymptotic relation between the considered measures of dependence. The verification of the results was carried out for the model with time-constant and time-periodic coefficients. For the time series with time-constant coefficients, a method of estimating the model's parameters using a selected dependence measure was proposed and its operation for simulated data was presented.

In the sixth chapter, the two-dimensional autoregressive model of 1 with  $\alpha$ -stable noise was applied to describe the two-dimensional real-world dataset. It has been shown that the model correctly reflects the nature of the analyzed data which are market risk factors.

The results of the dissertation were described in seven scientific articles.

## *Streszczenie rozprawy doktorskiej pt. „Analiza struktury zależności dla dwuwymiarowego modelu autoregresyjnego z $\alpha$ -stabilnym szumem”*

Niniejsza rozprawa poświęcona została analizie czasowo-przestrzennej struktury zależności dla dwuwymiarowego modelu autoregresyjnego rzędu 1 z  $\alpha$ -stabilnym szumem. W celu opisu zależności pomiędzy składowymi modelu wprowadzono pojęcia kowariacji krzyżowej (*cross-covariation*) oraz kodyferencji krzyżowej (*cross-codifference*), które uogólniają auto-kowariację oraz auto-kodyferencję stosowane do opisu struktury zależności jednowymiarowego procesu stochastycznego o rozkładzie  $\alpha$ -stabilnym. Głównymi rezultatami przedstawionymi w rozprawie są wyniki dotyczące asymptotycznego zachowania kodyferencji oraz kowariacji zastosowanej do opisu zależności w czasie dla składowych przestrzennych analizowanego modelu dwuwymiarowego. Asymptotyczne zachowanie miar zależności zbadane zostało dla modelu ze współczynnikami stałymi w czasie oraz dla modelu ze współczynnikami okresowymi w czasie, dla którego zależność między składowymi przestrzennymi wynika wyłącznie z zależności rozkładów brzegowych dwuwymiarowego  $\alpha$ -stabilnego szumu. Dla obu modeli zbadano asymptotyczną relację pomiędzy kodyferencją oraz kowariacją (w wersji auto- oraz krzyżowej) i pokazano, że wyniki uzyskane w przypadku modelu dwuwymiarowego uogólniają analogiczne i znane w literaturze rezultaty dotyczące jednowymiarowego modelu autoregresyjnego rzędu 1 z  $\alpha$ -stabilnym szumem. Teoretyczne wyniki przedstawione w rozprawie zostały zweryfikowane numerycznie z wykorzystaniem symulacji Monte Carlo.

W pierwszym rozdziale przedstawiono przegląd literatury dotyczącej modeli autoregresyjnych, rozkładów  $\alpha$ -stabilnych oraz miar stosowanych do opisu zależności dla procesów stochastycznych o rozkładach  $\alpha$ -stabilnych. W rozdziale drugim przytoczone zostały podstawowe pojęcia dotyczące szumu w rozważanym modelu autoregresyjnym, takie jak jednowymiarowy oraz wielowymiarowy rozkład  $\alpha$ -stabilny, kowariancja, kowariacja oraz kodyferencja. Wprowadzone zostało pojęcie kowariacji krzyżowej oraz kodyferencji krzyżowej.

Rozdział trzeci poświęcony został przedstawieniu znanych w literaturze wyników dotyczących jednowymiarowego modelu autoregresyjnego rzędu 1 z  $\alpha$ -stabilnym szumem. Dla powyższego modelu, z uwzględnieniem przypadku współczynników stałych oraz okresowych w czasie, zaprezentowano postać rozwiązania odpowiadającego równania autoregresyjnego, miary auto-zależności oraz twierdzenie dotyczące asymptotycznej relacji między auto-kodyferencją a auto-kowariancją dla rozważanego modelu.

W rozdziale czwartym zaprezentowano główne wyniki przedstawione w rozprawie. Dla dwuwymiarowego modelu autoregresyjnego rzędu 1 z  $\alpha$ -stabilnym szumem przedstawiono postać rozwiązania dla odpowiadającego mu układu równań autoregresyjnych oraz wyznaczono miary opisujące czasowo-przestrzenną strukturę zależności. Następnie zbadano asymptotyczne zachowanie miar zależności kolejno dla modelu ze współczynnikami stałymi w czasie oraz dla modelu ze współczynnikami okresowymi w czasie. W obu przypadkach sformułowano twierdzenia dotyczące asymptotycznej relacji między kodyferencją a kowariacją (w wersji auto- oraz krzyżowej), które uogólniają wyniki uzyskane dla modelu jednowymiarowego. Ich treść przedstawiono w Twierdzeniu 4.1 oraz Twierdzeniu 4.5, odpowiednio dla modelu o współczynnikach stałych oraz okresowych w czasie.

W rozdziale piątym dokonano numerycznej weryfikacji uzyskanych wyników poprzez porównanie analitycznych wzorów dotyczących miar zależności z ich empirycznymi odpowiednikami otrzymanymi na podstawie wysymulowanych trajektorii dwuwymiarowego szeregu czasowego. Na wykresach zaprezentowano również asymptotyczną relację między rozważanymi miarami zależności. Weryfikacja wyników została przeprowadzona dla modelu ze współczynnikami stałymi oraz okresowymi w czasie. Dla szeregu czasowego ze współczynnikami stałymi w czasie zaproponowano metodę estymacji parametrów modelu wykorzystującą wybraną miarę zależności oraz zaprezentowano jej działanie dla danych symulowanych.

W rozdziale szóstym dwuwymiarowy model autoregresyjny rzędu 1 z  $\alpha$ -stabilnym szumem został zastosowany do opisu dwuwymiarowego zestawu danych dotyczącego kursu walutowego oraz ceny miedzi. Pokazano, że model prawidłowo oddaje charakter analizowanych dwuwymiarowych danych, będących czynnikami ryzyka rynkowego.

Wyniki zawarte w rozprawie zostały opisane w siedmiu artykułach naukowych.