WYDZIAŁ MATEMATYKI
KARTA PRZEDMIOTU

Nazwa przedmiotu w języku polskim:	**Teoria Miary**
Nazwa przedmiotu w języku angielskim:	**Measure Theory**
Kierunek studiów:	**Matematyka, Matematyka i Analiza Danych**
Stopień studiów i forma:	**I stopień, stacjonarna**
Rodzaj przedmiotu:	**obowiązkowy**
Kod przedmiotu:	
Grupa kursów:	**TAK**

	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Projekt	Seminarium
Liczba godzin zajęć zorganizowanych w Uczelni (ZZU)	**45**	**30**			
Liczba godzin całkowitego nakładu pracy studenta (CNPS)	**120**	**90**			
Forma zaliczenia	**egzamin**				
Dla grupy kursów zaznaczyć kurs końcowy (X)	**X**				
Liczba punktów ECTS	**4**	**3**			
w tym liczba punktów odpowiadająca zajęciom o charakterze praktycznym (P)		**3**			
w tym liczba punktów ECTS odpowiadająca zajęciom wymagającym bezpośredniego udziału nauczycieli lub innych osób prowadzących zajęcia (BU)	**1,7**	**1,1**			

WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I KOMPETENCJI SPOŁECZNYCH

1. Znajomość pojęć i twierdzeń rachunku różniczkowego oraz przede wszystkim całkowego funkcji jednej i wielu zmiennych.
2. Znajomość rachunku zbiorów.

CELE PRZEDMIOTU

C1 Poznanie podstawowych własności miar – ze szczególnym uwzględnieniem miary Lebesgue'a.
C2 Zrozumienie znaczenia całki Lebesgue'a.
C3 Opanowanie pojęć zbieżności według miary oraz zasad przechodzenia z granicą pod całkę.
C4 Poznanie podstawowych narzędzi i twierdzeń abstrakcyjnej teorii miary.
C5 Nabycie umiejętności dostrzegania zjawisk teorio-miarowych w zagadnieniach z pokrewnych działów matematyki oraz w zastosowaniach praktycznych.

PRZEDMIOTOWE EFEKTY UCZENIA SIĘ

Z zakresu wiedzy:

PEU_W01 znajomość aksjomatyki i własności miar, przestrzeni mierzalnych i miarowych
PEU_W02 znajomość miary Lebesgue'a na prostej i w R^n,
PEU_W03 znajomość pojęcia mierzalności funkcji i wiedza o aproksymacji funkcjami prostymi
PEU_W04 zrozumienie pojęcia całki Lebesgue'a, jej powiązań z całką Riemanna i znajomość twierdzeń o zbieżności monotonicznej i ograniczonej
PEU_W05 opanowanie fundamentalnych narzędzi teorii miary: twierdzenia Fubiniego, twierdzenia Radona-Nikodyma

Z zakresu umiejętności:
PEU_U01 umiejętność obliczania wartości miary Lebesgue'a oraz innych miar borelowskich konkretnych zbiorów na prostej i na płaszczyźnie
PEU_U02 rozpoznawanie funkcji mierzalnych i przeprowadzanie dowodów metodą „komplikacji funkcji", rozpoznawanie zbieżności według miary i prawie wszędzie
PEU_U03 opanowanie technik całkowania całką Lebesgue'a, w szczególności przechodzenie z granicą pod całkę
PEU_U04 umiejętność stosowania podstawowych twierdzeń teorii miary w przykładach i zadaniach oraz samodzielnego przeprowadzania prostych dowodów
PEU_U05 umiejętność stosowania narzędzi teorii miary i całki Lebesgue'a w pokrewnych dziedzinach matematyki

Z zakresu kompetencji społecznych:
PEU_K01 umiejętność korzystania z dostępnej literatury naukowej
PEU_K02 zrozumienie potrzeby systematycznej i samodzielnej pracy nad opanowaniem materiału
PEU_K03 hartowanie się w dążeniu do osiągnięcia celu (np. rozwiązania zadania), pomimo początkowych trudności
PEU_K04 umiejętność prezentowania swoich rozumowań i dyskutowania na temat wystąpień kolegów

TREŚCI PROGRAMOWE		
Forma zajęć - wykład		**Liczba godzin**
Wy1	Wykład wstępny. Cel i zakres kursu. Rozważania dotyczące wielkości zbiorów, np. uzasadnienie zerowania się pola odcinka, prostej czy okręgu oraz „długości" zbioru skończonego i zbioru Cantora; wspólne własności długości, pola, objętości, liczności zbiorów, prawdopodobieństwa dyskretnego itp. Operacje na zbiorach. Definicja sigma-ciała.	2
Wy2	Własności sigma-ciał. Przykłady sigma-ciał: trywialne, zbiór potęgowy, zbiory przeliczalne i ko-przeliczalne. Operacja generowania. Sigma-ciało borelowskie na prostej, w R^n i w przestrzeni metrycznej.	4
Wy3	Definicja miary i podstawowe własności: przeliczalna addytywność, monotoniczność, ciągłość w górę itp. Przykłady, w tym: delta Diraca, miara na zbiorze skończonym, prawdopodobieństwo dyskretne, miara licząca.	2
Wy4	Miara Lebesgue'a na prostej – twierdzenie o istnieniu i szkic konstrukcji.	2
Wy5	Inne miary na prostej – pojęcie dystrybuanty, jak własności miary przekładają się na własności jej dystrybuanty (i na odwrót).	2
Wy6	Funkcje mierzalne – definicja i warunki równoważne. Operacje arytmetyczne na funkcjach mierzalnych. Funkcje borelowskie. Złożenie funkcji mierzalnej i borelowskiej. Funkcje charakterystyczne i funkcje proste.	3
Wy7	Różne rodzaje zbieżności: zbieżność prawie wszędzie i zbieżność według miary. Definicje i własności, związki między nimi i porównanie z wcześniej poznanymi rodzajami zbieżności ciągów funkcyjnych (punktowa, jednostajna).	4
Wy8	Całka Lebesgue'a na przestrzeni miarowej: konstrukcja i własności. Funkcje całkowalne. Przykłady całkowania względem poznanych przykładów miar: delty Diraca, miary o skończonym nośniku, miary liczącej. Interpretacja całki jako wartości oczekiwanej.	6

Wy9	Związki i porównanie całki Lebesgue'a z całką Riemanna.	2
Wy10	Lemat Fatou i twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności całek. Twierdzenie o całkowaniu szeregu.	4
Wy11	Sigma- ciało produktowe w produkcie dwóch przestrzeni miarowych. Miara produktowa – twierdzenie o istnieniu i szkic konstrukcji. Twierdzenia Fubiniego i Tonellego. Przykłady obliczania miary produktowej i całek względem miary produktowej. Uwagi o produktach więcej niż dwóch przestrzeni.	6
Wy12	Absolutna ciągłość miar, singularność, twierdzenie Radona-Nikodyma, twierdzenie o rozkładzie miary na część singularną i absolutnie ciągłą.	4
Wy13	Miary znakowane. Rozkład Hahna i rozkład Jordana.	2
Wy14	Przestrzenie funkcji całkowalnych z p-tą potęgą. Zbieżność w normie L^p.	2
	Suma godzin	**45**

Forma zajęć - ćwiczenia		**Liczba godzin**
Ćw1	Operacje na zbiorach, granica dolna i górna ciągu zbiorów. Sigma-ciała. Operacja generowania sigma-ciała.	4
Ćw2	Miary: przykłady i własności.	4
Ćw3	Miara Lebesgue'a: własności i przykłady obliczania.	2
Ćw4	Zastosowania dystrybuant do określania miar i badania ich własności.	2
Ćw5	Funkcje mierzalne, operacje na funkcjach prostych i mierzalnych, testowanie mierzalności.	4
Ćw6	Zbieżność według miary i zbieżność prawie wszędzie.	2
Ćw7	Własności całki Lebesgue'a w przykładach, obliczanie całek przykładowych funkcji	4
Ćw8	Twierdzenia o wejściu z granicą pod znak całki.	2
Ćw9	Miara produktowa Lebesgue'a na płaszczyźnie, inne przykłady miar produktowych, całkowanie z zastosowaniem tw. Fubiniego.	4
Ćw10	Absolutna ciągłość, wzajemna singularność i twierdzenie Radona-Nikodyma. Miary znakowane.	2
	Suma godzin	**30**

STOSOWANE NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE
N1. Wykład problemowy – metoda tradycyjna. N2. Ćwiczenia problemowe – metoda tradycyjna. N3. Konsultacje.

OCENA OSIĄGNIĘCIA PRZEDMIOTOWYCH EFEKTÓW UCZENIA SIĘ

Oceny (F – formująca (w trakcie semestru), P – podsumowująca (na koniec semestru)	Numer efektu uczenia się	Sposób oceny osiągnięcia efektu uczenia się
F1	PEU_W01—PEU_W05 PEU_U01—PEU_U05 PEU_K01—PEU_K04	Odpowiedzi ustne, kartkówki,
F2	PEU_W01—PEU_W05 PEU_U01—PEU_U05 PEU_K01—PEU_K03	Kolokwia
F3	PEU_W01—PEU_W05 PEU_U01—PEU_U05 PEU_K01—PEU_K03	Egzamin
P = a*F1+b*F2+(1-a-b)*F3, stałe a,b do wyboru przez wykładowcę		

LITERATURA PODSTAWOWA I UZUPEŁNIAJĄCA
<u>**LITERATURA PODSTAWOWA:**</u> [1] J. Myjak, *Funkcje rzeczywiste, miara całka Lebesgue'a*, AGH, Kraków 2006. [2] R. Schilling, *Measure, Integral, Probability & Processes: A concise introduction to probability and random processes. Probab(ilistical)ly the theoretical minimum,* Independently Published, 2021. [3] G. Plebanek, *Miara i całka*, http://www.math.uni.wroc.pl/~grzes/dydaktyka18_19/fr_main.pdf. [4] S. Hartman i J. Mikusiński, *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, Warszawa 1957. [5] R.F. Bass "Real Analysis for Graduate Students: Measure and Integration Theory", https://bass.math.uconn.edu/3rd.pdf. [6] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, New York 1950. <u>**LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA:**</u> [7] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1976. [8] J. C. Oxtoby, Measure and Cathegory, Springer, 1971. [9] K. Falconer, Techniques in Fractal Geometry, Wiley & Sons, Chichester 1997.
OPIEKUN PRZEDMIOTU (IMIĘ, NAZWISKO, ADRES E-MAIL)
prof. dr hab. Tomasz Downarowicz (Tomasz.Townarowicz@pwr.edu.pl) dr hab. Bartosz Frej (Bartosz.Frej@pwr.edu.pl)

i.