Dariusz Kosz

dariusz.kosz@pwr.edu.pl
prac.im.pwr.edu.pl/~kosz/

Wrocław, 2 czerwca 2024 r.

AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

- Dariusz Kosz

2. Dyplomy i stopnie naukowe

- Doktor matematyki, dyplom obroniony z wyróżnieniem w 2019 r.
  Politechnika Wrocławska
  Promotor: prof. dr hab. Krzysztof Stempak
  Tytuł rozprawy: „Maximal operators in non-doubling metric measure spaces"
- Magister matematyki, dyplom obroniony w 2015 r.
  Politechnika Wrocławska

3. Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych

- BCAM – Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao, Hiszpania
  Stanowisko typu postdok, 01.07.2021–31.08.2023
- Politechnika Wrocławska, Wrocław, Polska
  Stanowisko adiunkta, od 01.03.2020
- Politechnika Wrocławska, Wrocław, Polska
  Stanowisko asystenta, 01.09.2019–29.02.2020

4. Osiągnięcia naukowe, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce

4.1. Tytuł osiągnięcia naukowego.

- Operatory maksymalne

4.2. Prace stanowiące osiągnięcie naukowe.

[H1] C. González-Riquelme, D. Kosz, BV *continuity for the uncentered Hardy–Littlewood maximal operator*, J. Funct. Anal. **281** (2021), no. 109037, 1–20. 10.1016/j.jfa.2021.109037

[H2] D. Kosz, *On differentiation of integrals in the infinite-dimensional torus*, Studia Math. **258** (2021), 103–119. 10.4064/sm191001-10-2

[H3] D. Kosz, J. Martínez-Perales, V. Paternostro, E. Rela, L. Roncal, *Maximal operators on the infinite-dimensional torus*, Math. Ann. **385** (2023), 2099–2137. 10.1007/s00208-022-02385-w

[H4] D. Kosz, M. Mirek, P. Plewa, B. Wróbel, *Some remarks on dimension-free estimates for the discrete Hardy–Littlewood maximal functions*, Israel J. Math. **150** (2023), 1–38. 10.1007/s11856-022-2382-7

[H5] D. Kosz, *Sharp constants in inequalities admitting the Calderón transference principle*, Ergodic Theory Dynam. Systems **44** (2024), 1597–1608. 10.1017/etds.2023.59

Mój wkład w **[H1]**, **[H3]** oraz **[H4]** opisali współautorzy prac w załączonych deklaracjach. Lista pozostałych artykułów oraz jednego preprintu znajduje się w rozdziale 4.3.11. Opisy **[H1]**–**[H5]** oraz pozostałych prac są umieszczone odpowiednio w rozdziałach 4.3.6–4.3.10 oraz 4.3.12–4.3.18 poniżej.

4.3. **Opis osiągnięcia naukowego.** Niniejsza praca habilitacyjna wnosi wkład w rozwój teorii operatorów maksymalnych, będącej częścią matematyki teoretycznej. Historycznie operatory maksymalne kojarzone są z analizą harmoniczną, ale ich wpływ jest widoczny w wielu innych gałęziach matematyki, takich jak analiza rzeczywista i zespolona, równania różniczkowe, teoria ergodyczna czy teoria prawdopodobieństwa.

Gdy w 1930 r. brytyjscy matematycy Godfrey Harold Hardy i John Edensor Littlewood wprowadzili pojęcie funkcji maksymalnej, zob. [34], posłużyli się językiem krykieta, co nie powinno dziwić, biorąc pod uwagę jak wielkim fanem owego sportu był pierwszy z nich. Główna idea, choć sformułowana dość skromnie jako uporządkowanie wyników graczy krykieta w najkorzystniejszej kolejności, a do tego nazwana przez autorów „na pierwszy rzut oka dość sztuczną", została przez nich opisana jako „zawierająca istotną nowość" niezbędną do rozwiązania konkretnego fundamentalnego problemu w teorii funkcji. Niedługo potem, wraz z odkryciem nowych intuicyjnych dowodów twierdzenia ergodycznego Birkhoffa i twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu, użyteczność operatorów maksymalnych była już niezaprzeczalna. Obecnie funkcje maksymalne są w matematyce powszechne i same w sobie stanowią obszar zainteresowania badaczy.

Artykuły **[H1]**–**[H5]**, które stanowią fundament pracy habilitacyjnej, przyczyniają się do zrozumienia operatorów maksymalnych oraz ich znaczenia w matematyce.

W **[H1]** udowadniamy, że klasyczny operator niescentrowany na prostej rzeczywistej jest ciągły na przestrzeni funkcji o skończonym wahaniu. To bardzo ważny wynik, jako że funkcje maksymalne są budowane ze średnich funkcji wyjściowych, a proces uśredniania powinien współgrać z mierzeniem wahania. Główny wynik **[H1]** był problemem otwartym, zob. [23], a jego scentrowana wersja pozostaje nierozwiązana.

W **[H2]** i **[H3]** operatory maksymalne są użyte do zbadania problemu różniczkowania pod znakiem całki w kontekście nieskończonego wymiaru. W **[H2]** odpowiadamy na pytanie zadane w [31], dotyczące tego zagadnienia w przypadku ważnej bazy różniczkowania rozważanej w [61]. W tym celu korzystamy z narzędzi probabilistycznych, traktując współrzędne punktu jako realizacje niezależnych zmiennych losowych. Z kolei w **[H3]** rozwijamy to podejście, badając związek między operatorami maksymalnymi i liczbą wymiarów dla konkretnych baz różniczkowania, które pojawiły się w wyniku analizy przeprowadzonej w **[H2]**.

Celem **[H4]** jest otrzymanie maksymalnych oszacowań ze stałymi, które nie dążą do nieskończoności wraz ze wzrostem wymiaru, skupiając się na operatorach scentrowanych związanych z wypukłymi symetrycznymi podzbiorami przestrzeni skończonego wymiaru. Głównym wynikiem **[H4]** jest stwierdzenie, że każde takie oszacowanie maksymalne w kontekście dyskretnym implikuje analogiczne oszacowanie w kontekście ciągłym bez zwiększania stałej. To ważny wynik, który jest również ostry, ponieważ dzięki pewnym wcześniejszym twierdzeniom wiadomo, że odwrotna implikacja nie może być prawdziwa, zob. [18].

W **[H5]** zagłębiamy się w nierówności maksymalne oraz ich wzmocnienia w ramach układów ergodycznych. Omawiamy rolę tych nierówności w dowodzeniu punktowej zbieżności różnych średnich ergodycznych, a także znaczenie samej ergodyczności w tym kontekście. Ponadto usprawniamy narzędzie służące do przeprowadzenia ważnej redukcji w kontekście hipotezy Furstenberga–Bergelsona–Leibmana, zob. hipoteza 4.1, jednego z głównych problemów otwartych w teorii ergodycznej, który był promowany przez Furstenberga i został sformułowany przez Bergelsona i Leibmana w ich przełomowej pracy [20].

Jak wynika z powyższych dyskusji, wpływ prac **[H1]**–**[H5]** wychodzi poza teorię operatorów maksymalnych czy nawet całą analizę harmoniczną. Zawarte tu odkrycia mają znaczenie dla teorii różniczkowania, geometrii wypukłej, teorii ergodycznej i teorii prawdopodobieństwa.

4.3.1. ***Plan opisu***. Niniejszy opis będzie przebiegał według następującego planu.

Rozdziały 4.3.2–4.3.5 pełnią funkcję wprowadzenia do teorii operatorów maksymalnych. Podzieliliśmy je na cztery bloki, przy czym każdy zajmuje się funkcjami maksymalnymi z nieco innego punktu widzenia:

- klasyczne operatory maksymalne w analizie harmonicznej,
- operatory maksymalne w teorii różniczkowania,
- operatory maksymalne w geometrii wypukłej,
- operatory maksymalne w teorii ergodycznej.

Ta lista nie zawiera wszystkich ciekawych aspektów, ale obejmuje wszystkie tematy omawiane później.

Rozdziały 4.3.6–4.3.10 stanowią trzon rozprawy habilitacyjnej. Każdy z nich opisuje wyniki otrzymane w jednym z artykułów **[H1]**–**[H5]**, które składają się na wspomniane wcześniej osiągnięcie naukowe.

Rozdziały 4.3.11–4.3.18 zawierają moje inne wyniki naukowe. Większość z nich używa obiektów zdefiniowanych wcześniej. Wyjątkiem jest rozdział 4.3.11, w którym wiele nowych pojęć wymaga wyjaśnienia. Robimy to zwięźle, aby uniknąć zbytniego skupiania się na temacie spoza głównego kierunku badawczego.

4.3.2. ***Operatory maksymalne typu Hardy'ego–Littlewooda***. Operatory maksymalne $f \mapsto \mathcal{M}f$ są ważnymi obiektami w analizie matematycznej. Zazwyczaj, dla danej nieujemnej funkcji f, funkcja maksymalna $\mathcal{M}f$ obliczona w punkcie x jest supremum średnich wartości f branych względem pewnej rodziny otoczeń punktu x. Stąd widać, że operatory maksymalne służą dostarczaniu ograniczeń górnych dla wartości innych istotnych obiektów w analizie, równaniach różniczkowych, fizyce itp. W rzeczy samej, wiele prac dotyczy nierówności maksymalnych, a wiele innych wykorzystuje te nierówności w powiązanych problemach.

Najbardziej klasycznymi operatorami maksymalnymi są niewątpliwie te Hardy'ego–Littlewooda, występujące w literaturze w dwóch wersjach, scentrowanej i niescentrowanej. Załóżmy, że mamy daną *przestrzeń metryczno-miarową* $\mathfrak{X}$, czyli trójkę (X, ρ, μ), gdzie X to niepusty zbiór, ρ to metryka, zaś μ to miara borelowska. Załóżmy warunek $0 < \mu(B(x,r)) < \infty$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $r \in \mathbb{R}_+$, gdzie

$$B(x,r) \coloneqq \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$$

jest *kulą otwartą o środku w x i promieniu r*. Funkcja borelowska $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest *lokalnie całkowalna*, gdy $\int_B |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ dla wszystkich kul otwartych $B \subseteq X$ (ta definicja różni się od klasycznej, która zamiast kul otwartych używa zbiorów zwartych). Klasę wszystkich takich f oznaczamy $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X})$. Dla $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X})$ określamy *funkcje maksymalne Hardy'ego–Littlewooda*, *scentrowaną* $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f$ i *niescentrowaną* $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}} f$, wzorami

$$\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f(x) \coloneqq \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| \, \mathrm{d}\mu \quad \text{oraz} \quad \mathcal{M}_{\mathfrak{X}} f(x) \coloneqq \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| \, \mathrm{d}\mu, \qquad x \in X,$$

gdzie drugie supremum jest wzięte po wszystkich kulach otwartych $B \subseteq X$ zawierających x.

W szczególnym przypadku przestrzeni n-wymiarowych $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, z metryką euklidesową i miarą Lebesgue'a piszemy po prostu $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n}$ i $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^n}$ lub $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{Z}^n}$ i $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}^n}$. Pojęcie $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}}$ sięga czasów Hardy'ego i Littlewooda [34], zaś wersję n-wymiarową $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n}$ wprowadził Wiener [69].

Wiadomo, że $0 \le \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f \le \mathcal{M}_{\mathfrak{X}} f$ dla wszystkich $\mathfrak{X}$ i wszystkich dopuszczalnych f. Oprócz tego $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f \equiv \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} |f|$ i $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}} f \equiv \mathcal{M}_{\mathfrak{X}} |f|$, co wskazuje, że często wystarczy pracować z nieujemnymi funkcjami f. Oba operatory są *podliniowe*, czyli mamy $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}(f+g) \le \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f + \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} g$ i $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}(cf) \equiv c\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f$ dla wszystkich $c \in [0, \infty)$ i wszystkich dopuszczalnych f i g oraz podobnie dla $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}$. Jeśli ponadto $\mathfrak{X}$ jest *dublująca*, czyli

$$\mu(B(x,2r)) \le C \mu(B(x,r)), \qquad x \in X, \ r \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

dla pewnej uniwersalnej stałej $C \in \mathbb{R}_+$, to wówczas $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}} f \le C' \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f$ dla pewnej stałej $C' \in \mathbb{R}_+$ zależącej tylko od C. Klasyczne przestrzenie $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{Z}^n$ z metryką euklidesową i miarą Lebesgue'a są dublujące.

Kolejnym krokiem w badaniu własności operatorów maksymalnych jest sprawdzenie ich ograniczoności na przestrzeniach Lebesgue'a $\mathcal{L}^p(\mathfrak{X})$. Dla danego $p \in [1, \infty]$ pytamy, czy *nierówność mocnego typu* (p,p)

$$\|\mathcal{M} f\|_{\mathcal{L}^p(\mathfrak{X})} \le C(\mathcal{M}, p) \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathfrak{X})}, \qquad f \in \mathcal{L}^p(\mathfrak{X}), \tag{4.2}$$

zachodzi z pewną stałą $C(\mathcal{M}, p) \in \mathbb{R}_+$, gdzie $\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{M}_{\mathfrak{X}}\}$. Oczywiście oba operatory są ograniczone na $\mathcal{L}^\infty(\mathfrak{X})$ ze stałą 1, czyli (4.2) zachodzi dla $p = \infty$ i dla wszystkich $\mathfrak{X}$ z $C(\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}, \infty) = C(\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}, \infty) = 1$. Ponadto twierdzenie Hardy'ego–Littlewooda–Wienera [69] daje (4.2) dla $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, oraz wszystkich $p \in (1, \infty]$. Dowód korzysta z lematu pokryciowego Vitalego [68], a standardowe metody dają to samo dla wszystkich $\mathfrak{X}$ spełniających (4.1) oraz dla obu operatorów $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ i $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}$.

W przypadku granicznym $p = 1$ zwykle nie spodziewamy się otrzymać (4.2). Jeśli przykładowo $0 < \int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$, to $\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n} f| = \infty$. Z tego powodu zasadne jest badać *nierówność słabego typu* (p,p)

$$\lambda \mu(\{\mathcal{M} f > \lambda\})^{1/p} \le C(\mathcal{M}, p) \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathfrak{X})}, \qquad f \in \mathcal{L}^p(\mathfrak{X}), \ \lambda \in \mathbb{R}_+, \tag{4.3}$$

dla każdego $p \in [1, \infty]$, gdzie przyjmujemy, że (4.3) jest równoważne (4.2), gdy $p = \infty$. Korzystając z [68] można udowodnić (4.3) dla wszystkich $p \in [1, \infty]$ oraz obu operatorów $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ i $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}$, gdy $\mathfrak{X}$ spełnia (4.1).

Gdy (4.1) nie zachodzi, analizowanie funkcji maksymalnych jest trudniejsze. Dla $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową i dowolną miarą Radona operator scentrowany spełnia (4.2) dla wszystkich $p \in (1, \infty]$ i (4.3) dla wszystkich $p \in [1, \infty]$ dzięki odpowiednim lematom pokryciowym. To samo dotyczy operatora niescentrowanego dla $n = 1$. Mimo to Sjögren [63] pokazał, że dla $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową i miarą gaussowską $\mathrm{d}\mu(x,y) = \exp\{-(x^2+y^2)/2\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ operator niescentrowany nie spełnia (4.3) dla $p = 1$. Ważnym krokiem w kierunku opracowania zadowalającej teorii operatorów maksymalnych w kontekście niedublujących przestrzeni $\mathfrak{X}$ było wprowadzenie przez Nazarova, Treila i Volberga [56] tzw. zmodyfikowanych operatorów maksymalnych oraz pokazanie ich dobrych własności. Po więcej informacji na temat operatorów Hardy'ego–Littlewooda na przestrzeniach niedublujących $\mathfrak{X}$ odsyłamy do rozdziału 4.3.12.

4.3.3. ***Operatory maksymalne stowarzyszone z bazami różniczkowania***. Jednym z ważniejszych wniosków z dobrych własności $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^n}$ jest prosty dowód twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu. Lebesque [45] pokazał, że jeśli $f \in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, to dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi następujący warunek. Jeśli $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ jest ciągiem kul euklidesowych zawierających x o promieniach dążących do 0, to

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} f, \tag{4.4}$$

gdzie $|E|$ jest n-wymiarową miarą Lebesgue'a zbioru mierzalnego $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Wiadomo nawet, że prawie każdy $x \in \mathbb{R}^n$ jest *punktem Lebesgue'a funkcji* f, czyli dla każdego $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ jak wyżej zachodzi

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |f - f(x)| = 0. \tag{4.5}$$

To stwierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy kule zastąpimy hipersześcianami o bokach równoległych do osi.

Współczesne wersje dowodu wyglądają następująco. Oczywiście (4.4) i (4.5) są spełnione dla każdego x, gdy f jest ciągła. Jeśli f jest lokalnie całkowalna, ale nieciągła, to dla każdego $m \in \mathbb{Z}_+$ możemy znaleźć funkcję ciągłą f_m spełniającą $\int_{B(\mathbf{0},2m)} |f - f_m| \le 2^{-2m}$. Niech $g_m := (f - f_m)\mathbb{1}_{B(\mathbf{0},2m)}$. Wówczas jeśli

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |f - f(x)| \ge 2^{-m+1}$$

dla pewnego $x \in B(\mathbf{0}, m)$ i pewnego $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ jak wyżej, to $|g_m(x)| \ge 2^{-m}$ lub $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^n} g_m(x) \ge 2^{-m}$. Niech E_m będzie zbiorem wszystkich takich punktów x. Mamy $|E_m| \le 2^{-m}(1 + C(\mathcal{M}_{\mathbb{R}^n}, 1))$ dla $C(\mathcal{M}_{\mathbb{R}^n}, 1))$ z (4.3) dzięki nierówności Czebyszewa i nierówności słabego typu (4.3) dla $p = 1$. Gdy $m \to \infty$, dostajemy (4.4) i (4.5) dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Dowód dla hipersześcianów przebiega podobnie.

Co ciekawe, jeśli $n > 1$, to wnioski dla hiperprostokątów zamiast kul czy hipersześcianów są inne. Dla danej funkcji $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ zdefiniujmy

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}^n} f(x) := \sup_{R \ni x} \frac{1}{|R|} \int_R |f|, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich otwartych hiperprostokątach $R \subseteq \mathbb{R}^n$ o bokach równoległych do osi i zawierających x. Ponieważ $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^n}$ jest zdominowany przez złożenie n jednowymiarowych operatorów niescentrowanych działających w kierunkach osi, to $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^n}$ spełnia (4.2) dla $p \in (1, \infty]$. Zatem (4.4) i (4.5) zachodzą dla prawie każdego $x \in \mathbb{R}^n$, gdy $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ dla takich p. Dla $p = 1$ nierówności (4.2) i (4.3) nie zachodzą, ale Jessen, Marcinkiewicz i Zygmund [38] udowodnili następujące oszacowanie typu Orlicza

$$|\{\mathcal{M}_{\mathcal{R}^n} f > \lambda\}| \le C_{\mathcal{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f/\lambda| \big(1 + (\log^+ |f/\lambda|)^{n-1}\big), \qquad f \in \mathcal{L}(1 + (\log^+ \mathcal{L})^{n-1})(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

które daje (4.4) i (4.5) dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$, gdy f po zlokalizowaniu należy do $\mathcal{L}(\log^+ \mathcal{L})^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Pokazali też, że z punktu widzenia (4.4) oraz oszacowań dla $\mathcal{M}_{\mathcal{R}^n}$ jak wyżej potęga $n - 1$ jest optymalna.

Zatem (4.4) zachodzi lub nie, w zależności od konkretnej rodziny zbiorów, względem których uśredniamy funkcje testowe, oraz klasy funkcji, które testujemy. To stwierdzenie prowadzi do następujących pojęć.

Rozważmy przestrzeń metryczno-miarową $\mathfrak{X}$ jak wyżej. Załóżmy, że dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór $\mathcal{B}(x)$ zbiorów mierzalnych S spełniających $x \in S$ i $0 < \mu(S) < \infty$. Dla $x \in X$ mówimy, że ciąg $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ *dąży do* x, jeśli każdy S_k należy do $\mathcal{B}(x)$ i średnice zbiorów S_k dążą do 0. Piszemy wówczas $S_k \Rightarrow x$. Rodzina $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ wyposażona w relację $\Rightarrow$ nazywana jest *bazą różniczkowania w* X, jeżeli dla każdego $x \in X$ zbiór ciągów dążących do x jest niepusty. Jeśli każdy $S \in \mathcal{B}$ jest otwarty oraz $x \in S \in \mathcal{B}$ implikuje $S \in \mathcal{B}(x)$, to $\mathcal{B}$ nazywamy *bazą różniczkowania typu Busemanna–Fellera*.

Operator maksymalny stowarzyszony z $\mathcal{B}$ wprowadzamy następująco. Rozważmy $f \colon X \to \mathbb{R}$ borelowską i spełniającą $\int_S |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ dla wszystkich $S \in \mathcal{B}$. Definiujemy $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} f(x) := \sup_{S \in \mathcal{B}(x)} \mu(S)^{-1} \int_S |f| \, \mathrm{d}\mu$ dla wszystkich $x \in X$. Z własności S będzie wynikać, że tak naprawdę będziemy pracować z $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X})$.

Dla danej klasy $\mathcal{L}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X})$ funkcji testowych mówimy, że $\mathcal{B}$ *różniczkuje* $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, jeśli dla każdej $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ zachodzi następujący warunek. Dla prawie każdego $x \in X$ jeśli ciąg $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ dąży do x, to

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\mu(S_k)} \int_{S_k} f \, \mathrm{d}\mu. \tag{4.6}$$

Po więcej informacji na temat $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ i (4.6) w kontekście konkretnych baz $\mathcal{B}$ odsyłamy do rozdziału 4.3.7.

4.3.4. ***Operatory maksymalne stowarzyszone z ciałami wypukłymi.*** Przypomnijmy, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ operator $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n}$ spełnia nierówność mocnego typu (4.2) dla $p \in (1, \infty]$ oraz słabego typu (4.3) dla $p \in [1, \infty]$. Choć lemat pokryciowy Vitalego [68] implikuje (4.2) dla wskazanego zakresu n i p, to dla ustalonego $p \in (1, \infty)$ stałe uzyskane w ten sposób rosną wykładniczo wraz z n. Stein [64] udowodnił, że ta zależność jest usuwalna, a optymalne stałe w (4.2) są jednostajnie ograniczone ze względu na n. To otworzyło dyskusję na temat tzw. *oszacowań niezależnych od wymiaru* dla różnych operatorów maksymalnych na $\mathbb{R}^n$.

Dla $n \in \mathbb{Z}_+$ niech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie *symetrycznym ciałem wypukłym*, czyli podzbiorem $\mathbb{R}^n$, który jest ograniczony, wypukły, otwarty i symetryczny. Dla $t \in \mathbb{R}_+$ zadajemy operator średniujący $\mathcal{M}^G_t$ wzorem

$$\mathcal{M}^G_t f(x) := \frac{1}{|G_t|} \int_{G_t + x} f, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

dla każdej $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Zbiór $G_t := \{y \in \mathbb{R}^n : t^{-1} y \in G\}$ jest dylatacją G o skali t, natomiast zbiór $G_t + x := \{y \in \mathbb{R}^n : y - x \in G_t\}$ to zbiór G_t przesunięty o x. Definiujemy również

$$\mathcal{M}^G_{*,E} f := \sup_{t \in E} |\mathcal{M}^G_t f| \quad \text{oraz} \quad \mathcal{M}^G_{*,\geq c} f := \sup_{t \in [c,\infty)} |\mathcal{M}^G_t f|, \qquad E \subseteq \mathbb{R}_+,\, c \in \mathbb{R}_+.$$

Jeśli $E = \mathbb{R}_+$, to stosujemy skrócony symbol $\mathcal{M}^G_*$.

Przez proste porównanie z $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n}$ widzimy, że $\mathcal{M}^G_*$ spełnia (4.2) dla $p \in (1, \infty]$ oraz (4.3) dla $p \in [1, \infty]$ z pewnymi stałymi, które mogą zależeć od G i p. Dla $p \in (1, \infty]$ niech $\mathcal{C}(G, p)$ będzie najmniejszą stałą $C(\mathcal{M}, p)$, dla której (4.2) zachodzi z $\mathcal{M} = \mathcal{M}^G_*$. Podobnie definiujemy $\mathcal{C}(G, 1)$ używając (4.3) z $\mathcal{M} = \mathcal{M}^G_*$ i $p = 1$. Oczywiście $\mathcal{C}(G, \infty) = 1$ dla wszystkich G. Dla $p \in [1, \infty)$ znane są następujące wyniki.

- Z [64] wynika, że dla ustalonego $p \in (1, \infty)$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}(B^{n,2}, p) < \infty$, gdzie dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ i każdego $q \in [1, \infty]$ symbol $B^{n,q}$ oznacza otwartą kulę w $\ell^q(\mathbb{R}^n)$ o promieniu 1.
- Z [11] wynika, że dla $p = 2$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sup_{G \subseteq \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(G, 2) < \infty$.
- Z [12] lub [22] wynika, że dla ustalonego $p \in (3/2, \infty)$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sup_{G \subseteq \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(G, p) < \infty$.
- Z [22] wynika, że dla ustalonego $p \in (1, \infty)$ mamy, że najmniejsze stałe spełniające (4.2) z $\mathcal{M} = \mathcal{M}^G_{*,\mathbb{D}}$, gdzie $\mathbb{D} := \{2^m : m \in \mathbb{Z}\}$, są jednostajnie ograniczone ze względu na n i G.
- Z [55] wynika, że dla ustalonych $p \in (1, \infty)$ i $q \in [1, \infty)$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}(B^{n,q}, p) < \infty$.
- Z [2] wynika, że dla $p = 1$ i $q = \infty$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}(B^{n,\infty}, 1) = \infty$.
- Z [16] wynika, że dla ustalonego $p \in (1, \infty)$ i dla $q = \infty$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}(B^{n,\infty}, p) < \infty$.

Najważniejsze pytania otwarte w tym obszarze badań brzmią następująco.

- Czy dla ustalonego $p \in (1, 3/2]$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sup_{G \subseteq \mathbb{R}^n} \mathcal{C}(G, p) < \infty$?
- Czy dla $p = 1$ i $q = 2$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}(B^{n,2}, 1) < \infty$?

Bourgain, Mirek, Stein i Wróbel [17, 18, 19] zainicjowali program systematycznego badania oszacowań niezależnych od wymiaru dla operatorów maksymalnych stowarzyszonych z ciałami na $\mathbb{Z}^n$. Dla $n \in \mathbb{Z}_+$ i $G \subseteq \mathbb{R}^n$ jak wyżej oraz $t \in \mathbb{R}_+$ zadajemy dyskretny operator średniujący $\mathfrak{M}^G_t$ wzorem

$$\mathfrak{M}^G_t f(x) := \frac{1}{\#(G_t \cap \mathbb{Z}^n)} \sum_{y \in G_t \cap \mathbb{Z}^n} f(x + y), \qquad x \in \mathbb{Z}^n,$$

dla każdej $f \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$, gdzie $\#(E)$ oznacza liczbę elementów zbioru E. Definiujemy też

$$\mathfrak{M}^G_{*,E} f := \sup_{t \in E} |\mathfrak{M}^G_t f| \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{M}^G_{*,\geq c} f := \sup_{t \in [c,\infty)} |\mathfrak{M}^G_t f|, \qquad E \subseteq \mathbb{R}_+,\, c \in \mathbb{R}_+,$$

i skracamy $\mathfrak{M}^G_{*,\mathbb{R}_+}$ do $\mathfrak{M}^G_*$. Również $\mathfrak{M}^G_*$ spełnia (4.2) dla $p \in (1, \infty]$ oraz (4.3) dla $p \in [1, \infty]$ z pewnymi stałymi, które mogą zależeć od G i p. Dla $p \in [1, \infty]$ niech $\mathfrak{C}(G, p)$ będzie odpowiednikiem $\mathcal{C}(G, p)$ z $\mathfrak{M}^G_*$ zamiast $\mathcal{M}^G_*$. Oczywiście $\mathfrak{C}(G, \infty) = 1$ dla wszystkich G. Dla $p \in [1, \infty)$ znane są następujące wyniki.

- Z [17] wynika, że dla ustalonego $p \in (3/2, \infty)$ i dla $q = \infty$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{C}(B^{n,\infty}, p) < \infty$.
- Z [17] lub [18] wynika, że dla ustalonego $p \in (1, \infty)$ i dla $q = \infty$ lub dla $p = q = 2$ mamy, że najmniejsze stałe spełniające (4.2) z $\mathcal{M} = \mathfrak{M}^{B^{n,q}}_{*,\mathbb{D}}$ są jednostajnie ograniczone ze względu na n.
- Z [19] wynika, że dla ustalonego $p \in (1, \infty)$ mamy $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sup_{G \subseteq \mathbb{R}^n} \mathfrak{C}(G, p) = \infty$.

Głównym zadaniem w tym obszarze jest pokazanie oszacowań niezależnych od wymiaru dla szerokiej klasy symetrycznych ciał wypukłych. Wydaje się, że podklasa ciał 1-symetrycznych jest tu dobrym kandydatem.

Po więcej informacji na temat oszacowań niezależnych od wymiaru odsyłamy do rozdziału 4.3.9.

4.3.5. ***Operatory maksymalne w teorii ergodycznej.*** Jednym z głównych problemów w teorii ergodycznej jest udowodnienie zbieżności prawie wszędzie różnych średnich ergodycznych, gdy parametr czasu dąży do nieskończoności. Klasyczne podejście do tego tematu zakłada dwuetapową procedurę.

(1) Znalezienie gęstej klasy funkcji, dla których zbieżność punktowa może być wykazana bezpośrednio.
(2) Udowodnienie odpowiedniej nierówności maksymalnej dla stowarzyszonych operatorów średniujących, która implikuje, że zbiór funkcji, dla których zbieżność punktowa zachodzi, jest domknięty.

Najdonioślejszym przykładem jest punktowe twierdzenie ergodyczne Birkhoffa [9], wynikające z twierdzenia ergodycznego w średniej von Neumanna [57] i nierówności maksymalnej dla jednostronnych operatorów średniujących na $\mathbb{Z}$ rozszerzonej na inne układy dzięki zasadzie transferencji Calderóna [21].

W przeciwieństwie do tego wyżej, nowe podejście często zakłada zastąpienie funkcji maksymalnych pewnymi większymi obiektami, które nie tylko ograniczają supremum danego ciągu liczb, ale także kontrolują jego zmienność. Dzięki temu zbieżność punktowa może być wykazana dla wszystkich funkcji bezpośrednio, o ile te większe obiekty spełniają odpowiednie oszacowania podobne do (4.2) lub (4.3).

Ostatnia idea była kluczowa w przełomowej serii artykułów Bourgaina [13, 14, 15], który pokazał punktowe twierdzenie ergodyczne dla operatorów średniujących wzdłuż orbit z czasami wielomianowymi. Ostatnio Krause, Mirek i Tao [43] otrzymali podobny wynik dla pewnych operatorów dwuliniowych. Jest to znaczący postęp w kontekście ogólnej hipotezy dotyczącej zbieżności punktowej wieloliniowych średnich wzdłuż wielomianowych orbit, promowanej przez Furstenberga i opisanej przez Bergelsona i Leibmana w [20].

Rozważmy *układ dynamiczny zachowujący miarę* $\mathcal{X}$, czyli czwórkę $(X, \mathcal{B}, \mu, \mathcal{T})$, gdzie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ to przestrzeń mierzalna z σ-skończoną miarą, a $\mathcal{T} = (T_k)_{k\in[K]}$, $K \in \mathbb{Z}_+$, to ciąg przemiennych odwracalnych *przekształceń zachowujących miarę* na X. Piszemy tu $[K] := \{1, \dots, K\}$, a ostatnie pojęcie oznacza, że $T_k \colon X \to X$ są mierzalne i $\mu(T_k^{-1}(E)) = \mu(E)$ dla wszystkich $E \in \mathcal{B}$. Niech $\mathcal{P} = (P_{k,l})_{k\in[K],l\in[L]}$, $L \in \mathbb{Z}_+$, zawiera wielomiany n-zmiennych, $n \in \mathbb{Z}_+$, spełniające $P_{k,l}(\mathbb{Z}^n) \subseteq \mathbb{Z}$. Dla $M \in \mathbb{Z}_+$ zadajemy

$$\mathcal{A}_M^{\mathcal{T},\mathcal{P}} \vec{f}(x) := \mathbb{E}_{m\in[M]^n} \prod_{l\in[L]} f_l(T_1^{P_{1,l}(m)} \cdots T_d^{P_{K,l}(m)} x), \qquad x \in X, \tag{4.7}$$

gdzie $\vec{f} = (f_l)_{l\in[L]}$ jest L-elementową krotką ograniczonych funkcji $f_l \colon X \to \mathbb{R}$, natomiast $\mathbb{E}_{y\in Y} g(y)$ oznacza wartość oczekiwaną funkcji g względem rozkładu jednorodnego na skończonym zbiorze Y.

W odniesieniu do L-liniowych operatorów średniujących (4.7) następującą hipotezę postawiono w [20].

Hipoteza 4.1. *Przy założeniach określonych wyżej dla operatorów* (4.7) *granica*

$$\lim_{M\to\infty} \mathcal{A}_M^{\mathcal{T},\mathcal{P}} \vec{f}(x)$$

istnieje μ-prawie wszędzie dla każdej L-krotki $\vec{f} = (f_l)_{l\in[L]}$ spełniającej $f_l \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})$ dla każdego $l \in [L]$.

Wiemy, że hipoteza 4.1 zachodzi w kilku przypadkach, a dowody bazują na ilościowej informacji na temat $(\mathcal{A}_M^{\mathcal{T},\mathcal{P}} \vec{f}(x))_{M\in\mathbb{Z}_+}$. Ogólny przypadek, jeśli jest prawdziwy, najpewniej należy wykazać podobnie.

Mając to na uwadze, rozważymy abstrakcyjne odwzorowanie $\mathcal{O} \colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+} \to [0, \infty]$, które da się przybliżać od dołu ciągiem $(\mathcal{O}_J)_{J\in\mathbb{Z}_+}$ odwzorowań zależnych od skończenie wielu współrzędnych. Zatem dla $J \in \mathbb{Z}_+$ niech $\mathcal{O}_J \colon \mathbb{R}^J \to [0, \infty)$ będzie mierzalne względem zwykłej topologii na $\mathbb{R}^J$. Przyjmujemy, że

$$\mathcal{O}_{J_0}((a_j)_{j\in[J_0]}) \le \lim_{J\to\infty} \mathcal{O}_J((a_j)_{j\in[J]}) = \mathcal{O}((a_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}), \qquad J_0 \in \mathbb{Z}_+,\ (a_j)_{j\in\mathbb{Z}_+} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}. \tag{4.8}$$

Najważniejszym przykładem $\mathcal{O}$ jest *norma supremum* $\mathcal{O}_*((a_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}) := \sup_{j\in\mathbb{Z}_+} |a_j|$ związana z opisanym wyżej podejściem klasycznym. Można ją przybliżyć od dołu przez $\mathcal{O}_{*,J}$, $J \in \mathbb{Z}_+$ zadane wzorem $\mathcal{O}_{*,J}((a_j)_{j\in[J]}) := \max_{j\in[J]} |a_j|$. Inne przykłady to kwazinormy typu wariacyjnego i skokowego, zob. [40].

Gdy $K = L = n = 1$, $T_1 = T$ i $P_1 = \mathrm{id}$, pojawia się następujący jednostronny operator maksymalny

$$T_*^{\mathrm{os}} f(x) := \sup_{M\in\mathbb{Z}_+} \Big| \frac{1}{M} \sum_{m\in[M]} f(T^m x) \Big|, \qquad x \in X. \tag{4.9}$$

Można również rozważać jego wersję z orbitami zaczynającymi się od x zamiast Tx. Podobnie zadajemy operatory maksymalne dwustronne, scentrowany T_*^{c} i niescentrowany T_*^{u}, odwołując się odpowiednio do średnich po orbitach $(T^m x)_{m=-M}^{M}$ i $(T^m x)_{m=-M}^{M'}$, gdzie $M, M' \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Po więcej informacji na temat $\mathcal{O}$ oraz $T_*^{\mathrm{os}}, T_*^{\mathrm{c}}, T_*^{\mathrm{u}}$ odsyłamy do rozdziału 4.3.10.

4.3.6. BV ***continuity for the uncentered Hardy–Littlewood maximal operator (praca* [H1]*).*** Poniżej stosujemy notację wprowadzoną w rozdziale 4.3.2.

Celem **[H1]** jest badanie klasycznych operatorów maksymalnych Hardy'ego–Littlewooda pod kątem regularności. Wykazujemy, że $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ jest ciągły na przestrzeni funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o skończonym wahaniu. Tym samym odpowiadamy na pytanie postawione przez Carneiro, Madrid i Pierce [23].

Kinnunen [41] zainicjował program badania regularności funkcji maksymalnych poprzez udowodnienie, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ odwzorowanie

$$f \mapsto \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n} f \tag{4.10}$$

jest ograniczone na przestrzeni Sobolewa $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ dla $p \in (1, \infty)$. Następnie liczni autorzy przyczynili się do rozwoju tej dziedziny, włączając w to wskazanie związków z teorią potencjału i równaniami różniczkowymi cząstkowymi, zob. m.in. [42], [10] i [60].

Istotny nacisk był położony na zbadanie ciągłości operacji (4.10) w różnych kontekstach. Jako że nie jest ona podliniowa na poziomie pochodnej, jej ciągłości nie da się wywnioskować z jej ograniczoności. Pierwszy rezultat, dający odpowiedź w tym kontekście, został otrzymany przez Luiro [50], który pokazał, że (4.10) jest istotnie operacją ciągłą na $\mathcal{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ i każdego $p \in (1, \infty)$.

Przypadek brzegowy $p = 1$ jest trudniejszy. Wynik Kinnunena tutaj nie zachodzi, ponieważ dla każdej niezerowej $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mamy $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n} f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Niemniej jednak, ponieważ chcemy badać funkcje maksymalne na poziomie pochodnej, naturalną wersją problemu dla $p = 1$ jest zbadanie odwzorowania

$$f \mapsto \nabla \mathcal{M} f \tag{4.11}$$

dla $f \in \mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\mathcal{M}$ to $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}^n}$ lub $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^n}$. Dla $n = 1$, ograniczoność operacji (4.11) z $\mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R})$ do $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ została udowodniona dla $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ w [67] i dla $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}}$ w [44]. Kolejna ważna praca to [3], gdzie otrzymano $\mathrm{Var}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f) \le \mathrm{Var}(f)$ dla wszystkich funkcji o skończonym wahaniu, czyli $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$. Ponadto udowodniono, że $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f$ jest absolutnie ciągła dla $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$, co można określić mianem własności wygładzania.

W **[H1]** szczególnie interesuje nas ciągłość (4.11) dla $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ i $p = 1$. Zauważamy, że metody Luiro [50] nie mogą być zastosowane w naszej sytuacji, ponieważ opierają się one na ograniczoności operatorów maksymalnych na $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, co nie zachodzi dla $p = 1$.

Pierwsze wyniki na temat ciągłości dla $p = 1$ zostały uzyskane w pracy [23]. Autorzy udowodnili między innymi że operacja $f \mapsto (\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f)'$ jest ciągła z $\mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R})$ do $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, zob. [23, Theorem 1]. Rozważali oni również przestrzeń $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$ wyposażoną w normę

$$\|f\|_{\mathrm{BV}(\mathbb{R})} := |f(-\infty)| + \mathrm{Var}(f)$$

i zastanawiali się, czy $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ działa w sposób ciągły na tej przestrzeni, zob. [23, Question B]. Główny wynik **[H1]** odpowiada na to pytanie twierdząco.

Twierdzenie 4.2. *Operator $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}\colon \mathrm{BV}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ jest ciągły.*

Twierdzenie 4.2 rozszerza [23, Theorem 1], gdyż $\mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R})$ można zanurzyć izometrycznie w $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$. Zauważmy, że w ogólności ciągłość na $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$ jest silniejsza niż ciągłość na $\mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R})$. Ilustruje to przykład ułamkowych operatorów maksymalnych na $\mathbb{R}$, dla których twierdzenie analogiczne do [23, Theorem 1] zachodzi, zob. [51], pomimo że odpowiednik twierdzenia 4.2 nie zachodzi, zob. [23, Theorem 3].

Aby udowodnić [23, Theorem 1], autorzy używają regularności funkcji wyjściowych. Mianowicie redukują oni swój problem do analogicznego dla jednostronnych operatorów maksymalnych, a następnie korzystają z faku, że jednostronne funkcje maksymalne są ciągłe. Ta ostatnia część nie jest prawdą dla wyjściowych funkcji branych z $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$. Z tego powodu nasze metody różnią się od tych opracowanych w [23].

Aby udowodnić twierdzenie 4.2, postępujemy zgodnie z poniższym schematem.

(1) Udowadniamy, że jeśli ciąg $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ funkcji z $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$ zbiega do pewnej funkcji $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$, to
$$\lim_{j \to \infty} \mathcal{M}_{\mathbb{R}} f_j(-\infty) = \mathcal{M}_{\mathbb{R}} f(-\infty) \quad \text{oraz} \quad \lim_{j \to \infty} \mathrm{Var}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f_j) = \mathrm{Var}(\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f).$$

(2) Udowadniamy, że jeśli ciąg $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ funkcji z $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$ zbiega do pewnej funkcji $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$, to
$$\lim_{j \to \infty} (\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f_j)'(x) = (\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f)'(x)$$
dla prawie każdego $x \in \{\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f > |\tilde{f}|\}$, gdzie $\tilde{f}$ jest pewnym ulepszeniem funkcji f.

(3) Korzystając z redukcji Brezisa–Lieba [20], wyprowadzamy ciągłość operatora $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ z (1) i (2).

4.3.7. ***On differentiation of integrals in the infinite-dimensional torus (praca* [H2]*)*.** Poniżej stosujemy notację wprowadzoną w rozdziale 4.3.3.

Celem **[H2]** jest zbadanie, czy różniczkowanie pod znakiem całki jest możliwe w kontekście bazy Rubio de Francii $\mathcal{R}$ na torusie $\mathbb{T}^\omega$ o nieskończonym wymiarze. W szczególności udowadniamy, że $\mathcal{R}$ nie różniczkuje $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T}^\omega)$. Tym samym odpowiadamy na pytanie postawione przez Fernándeza i Roncal [31].

Badanie torusa o nieskończonym wymiarze $\mathbb{T}^\omega$ wynikają naturalnie z prób uogólnienia analizy wielowymiarowej na nieskończenie wiele wymiarów. Istnieje wiele prac zajmujących się $\mathbb{T}^\omega$ w kontekście różnych dziedzin, takich jak teoria potencjału [5, 7, 4], teoria ergodyczna [49], a także analiza harmoniczna [61, 31].

Ostatnio Fernández i Roncal [31] wprowadzili rozkład typu Calderóna–Zygmunta na $\mathbb{T}^\omega$ w celu zbadania zagadnienia różniczkowania pod znakiem całki w kontekście tej przestrzeni. Badali oni trzy bazy:

- *diadyczną bazę Rubio de Francii* $\mathcal{R}_0$,
- *bazę Rubio de Francii* $\mathcal{R}$,
- *rozszerzoną bazę Rubio de Francii* $\mathcal{R}^*$.

W przypadku $\mathcal{R}_0$ dobre właściwości różniczkowania wynikają z odpowiednich oszacowań maksymalnych dla $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_0}$. Natomiast dla $\mathcal{R}^*$ autorzy zastosowali pomysł Jessena [36, 37] w celu pokazania, że analogiczne wyniki nie zachodzą. Przypadek $\mathcal{R}$ jest trudniejszy i wiele pytań dotyczących różniczkowania pod znakiem całki oraz zachowania $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ pozostało otwartych. W **[H2]** odpowiadamy na wszystkie te pytania.

Niech $\mathbb{T}$ będzie przestrzenią ilorazową $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ lub inaczej przedziałem $[0,1]$ ze sklejonymi końcami. Torus o nieskończonym wymiarze $\mathbb{T}^\omega := \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \cdots$ to przeliczalny iloczyn kopii $\mathbb{T}$. Jest to grupa z elementem neutralnym $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$ i znormalizowaną miarą Haara, będącą iloczynem miar Lebesgue'a na $\mathbb{T}$.

Przestrzeń $\mathbb{T}^\omega$ ze zwykłą topologią produktową jest zwarta i metryzowalna. Jej σ-ciało borelowskie generują hiperprostokąty $I = \prod_{j \in \mathbb{Z}_+} I_j$, gdzie I_j są przedziałami w $\mathbb{T}$ oraz dla pewnego j_0 mamy $I_j = \mathbb{T}$, gdy $j > j_0$. Dla $j \in \mathbb{Z}_+$ niech $\mathbb{T}^{j,\omega}$ będzie kopią $\mathbb{T}^\omega$ z pominięciem pierwszych j osi, czyli $\mathbb{T}^{j,\omega} = \mathbb{T}^j \times \mathbb{T}^{j,\omega}$.

Aby zdefiniować $\mathcal{R}$, używamy $R_k := \{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, oraz dwóch szczególnych ciągów:

- $H_1 \subsetneq H_2 \subsetneq \cdots$ (podgrupy $\mathbb{T}^\omega$ spełniające $\mathbb{T}^\omega = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} H_m}$ i $[H_{m+1} : H_m] = 2$),
- $V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \cdots$ (zbiory otwarte zadane przez grupy ilorazowe $\mathbb{T}^\omega / H_m$).

Tabela 1 pokazuje, jak generować H_m oraz V_m. Przez $\mathbf{0}^{(j)}$ rozumiemy element neutralny $\mathbb{T}^{j,\omega}$.

TABELA 1. Obiekty potrzebne do zdefiniowania bazy Rubio de Francii.

m	H_m	V_m
1	$R_2 \times \{\mathbf{0}^{(1)}\}$	$(0, 1/2) \times \mathbb{T}^{1,\omega}$
2	$R_2 \times R_2 \times \{\mathbf{0}^{(2)}\}$	$(0, 1/2) \times (0, 1/2) \times \mathbb{T}^{2,\omega}$
3	$R_4 \times R_2 \times \{\mathbf{0}^{(2)}\}$	$(0, 1/4) \times (0, 1/2) \times \mathbb{T}^{2,\omega}$
4	$R_4 \times R_4 \times \{\mathbf{0}^{(2)}\}$	$(0, 1/4) \times (0, 1/4) \times \mathbb{T}^{2,\omega}$
5	$R_4 \times R_4 \times R_2 \times \{\mathbf{0}^{(3)}\}$	$(0, 1/4) \times (0, 1/4) \times (0, 1/2) \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
6	$R_4 \times R_4 \times R_4 \times \{\mathbf{0}^{(3)}\}$	$(0, 1/4) \times (0, 1/4) \times (0, 1/4) \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
7	$R_8 \times R_4 \times R_4 \times \{\mathbf{0}^{(3)}\}$	$(0, 1/8) \times (0, 1/4) \times (0, 1/4) \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
8	$R_8 \times R_8 \times R_4 \times \{\mathbf{0}^{(3)}\}$	$(0, 1/8) \times (0, 1/8) \times (0, 1/4) \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
9	$R_8 \times R_8 \times R_8 \times \{\mathbf{0}^{(3)}\}$	$(0, 1/8) \times (0, 1/8) \times (0, 1/8) \times \mathbb{T}^{3,\omega}$
10	$R_8 \times R_8 \times R_8 \times R_2 \times \{\mathbf{0}^{(4)}\}$	$(0, 1/8) \times (0, 1/8) \times (0, 1/8) \times (0, 1/2) \times \mathbb{T}^{4,\omega}$
...	...	...

Zgodnie z powyższą notacją baza Rubio de Francii $\mathcal{R}$ jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{R} := \{x + V_m : m \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{T}^\omega\}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{R}$ jest bazą typu Busemanna–Fellera po usunięciu z $\mathbb{T}^\omega$ zbioru miary 0. Głównym wynikiem **[H2]** jest następujące twierdzenie, które odpowiada na wszystkie pytania postawione w [31, Section 3.1].

Twierdzenie 4.3. *Baza Rubio de Francii $\mathcal{R}$ nie różniczkuje $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{T}^\omega)$.*

Aby udowodnić twierdzenie 4.3, stosujemy podejście probabilistyczne i redukujemy problem do badania pewnych zmiennych losowych rozkładu dwumianowego. Więcej szczegółów znajduje się w rozdziale 4.3.8.

4.3.8. ***Maximal operators on the infinite-dimensional torus* (*praca* [H3]).** Poniżej stosujemy notację wprowadzoną w rozdziałach 4.3.3 i 4.3.7.

Celem **[H3]** jest wzmocnienie wyników uzyskanych w **[H2]** poprzez badanie pewnej klasy baz różniczkowania $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}$ oraz uściślenie relacji pomiędzy strukturą $\mathcal{B}$ i własnościami operatora $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$.

Na początek opiszemy pomysł z dowodu twierdzenia 4.3. Rozważmy $V_{m^4} = (0, 2^{-m^2})^{m^2} \times \mathbb{T}^{m^2,\omega}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, oraz zrzutujmy $\mathbb{T}^\omega$ na pierwszych m^2 współrzędnych. Oznaczmy $\alpha_m := 2^{-m^2}$ i zdefiniujmy

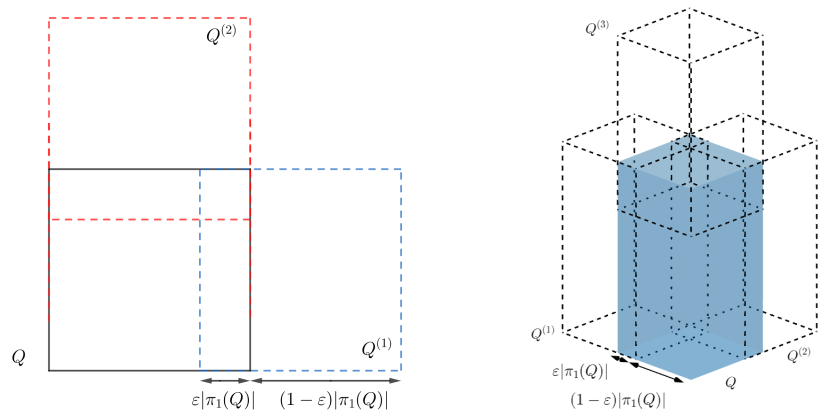
$$A_m := (0, \alpha_m)^{m^2} \quad \text{oraz} \quad A'_m := (0, \alpha_m(1 + 1/m))^{m^2}.$$

Używając centralnego twierdzenia granicznego (lub bezpośrednich obliczeń dla zmiennych losowych z rozkładu dwumianowego o parametrach m^2 i $\frac{1}{m+1}$), dostajemy dla większości $x \in A'_m$, że co najwyżej $4m$ współrzędnych x_i spełnia $x_i \in (\alpha_m, \alpha_m(1 + 1/m))$. Dla każdego takiego x istnieje A^x_m, translacja A_m, spełniająca $x \in A^x_m$ i $|A^x_m \cap A_m| \geq \frac{1}{2}(1 - 1/m)^{4m}|A_m| \geq e^{-10}|A_m|$. Stąd $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}\mathbb{1}_{V_{m^4}}(x) \geq e^{-10}$ dla większości $x \in V'_{m^4} := (0, \alpha_m(1 + 1/m))^{m^2} \times \mathbb{T}^{m^2,\omega}$, podczas gdy $\lim_{m\to\infty} |V'_{m^4}|/|V_{m^4}| = \infty$. Biorąc wiele losowo przesuniętych struktur tego typu przy $m \to \infty$, możemy dostać zbiór $V \subseteq \mathbb{T}^\omega$ o mierze $|V| \leq \frac{1}{2}$, taki że dla prawie każdego $x \in \mathbb{T}^\omega$ prawa strona (4.4) dla $\mathbb{1}_V$ i pewnego $(V^x_{m_k^4})_{k\in\mathbb{Z}_+} \Rightarrow x$ przekracza e^{-10}.

Ważnym krokiem w kierunku zrozumienia relacji między strukturą $\mathcal{B}$ i własnościami $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ jest zbadanie tzw. (ε, l)-*konfiguracji* zdefiniowanych w **[H3]**. Niech $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ oraz $l \in \mathbb{Z}_+$. Zbiór $\{Q^{(i)} : i \in [l]\} \subseteq \mathcal{R}$ jest (ε, l)-konfiguracją, jeśli istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{T}^\omega$ spełniający dwa warunki:

- $|Q^{(i)}| = |A|$ oraz $\varepsilon|A| \leq |Q^{(i)} \cap A| \leq (1 - \varepsilon)|A|$ dla każdego $i \in [l]$,
- zbiory $Q^{(1)} \setminus A, \dots, Q^{(l)} \setminus A$ są rozłączne.

Rozważmy $Q \in \mathcal{R}$ mający przynajmniej l przyciętych współrzędnych. Dla $i \in [l]$ niech $Q^{(i)} := x^{(i)} + Q$, gdzie $x^{(i)} := (0, \dots, 0, (1 - \varepsilon)|\pi_i(Q)|, 0, \dots)$, zaś $\pi_i(Q)$ jest rzutem Q na i-tą współrzędną. Nazywamy ten przykład (ε, l)-*konfiguracją wokół* Q, zob. rysunek 1.



RYSUNEK 1. Po lewej rzut na pierwsze dwie osie pewnej $(\varepsilon, 2)$-konfiguracji wokół $Q \in \mathcal{R}$ z dwiema przyciętymi współrzędnymi. Po prawej rzut na pierwsze trzy osie pewnej $(\varepsilon, 3)$-konfiguracji wokół innego $Q \in \mathcal{R}$ z trzema przyciętymi współrzędnymi.

Główny wynik **[H3]** wygląda następująco.

Twierdzenie 4.4. *Niech $\mathcal{R}' := \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{S}$ będzie bazą różniczkowania w $\mathbb{T}^\omega$ postaci $\mathcal{S} := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}_j$ dla rozłącznych (ε_j, l_j)-konfiguracji $\mathcal{S}_j$ wokół pewnych $Q_j \in \mathcal{R}$, gdzie $\varepsilon_j \in (0, \frac{1}{2}]$ i $l_j \in \mathbb{Z}_+$. Wówczas*

- *$\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}$ jest słabego typu $(1, 1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} l_j < \infty$,*
- *$\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}$ jest restrykcyjnie słabego typu (p, p), $p \in (1, \infty)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{j\in\mathbb{Z}_+} \varepsilon_j^p l_j < \infty$,*

gdzie dla $p \in (1, \infty)$ ostatnia własność oznacza, że (4.3) zachodzi dla indykatorów zbiorów mierzalnych. Stąd dla $p_0 \in (1, \infty)$ można znaleźć $\mathcal{R}'$, taką że $\mathcal{R}_0 \subsetneq \mathcal{R}' \subsetneq \mathcal{R}$, przy czym $\mathcal{M}_{\mathcal{R}'}$ jest restrykcyjnie słabego typu (p, p) dla $p \in [p_0, \infty)$ (odpowiednio $p \in (p_0, \infty)$), lecz nie dla $p \in (1, p_0)$ (odpowiednio $p \in (1, p_0]$).

Aby udowodnić twierdzenie 4.4, badamy wyższe momenty zmiennych losowych zadanych przez $\mathcal{S}_j$. Oprócz tego w pracy rozważamy oszacowania wagowe. Pokazujemy, że jeśli v jest wagą Muckenhoupta $A_q^{\mathcal{R}}(\mathbb{T}^\omega)$ dla $q \in (1, \infty)$, to $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ nie jest restrykcyjnie słabego typu (p, p) względem v dla $p \in (1, \infty)$.

4.3.9. ***Some remarks on dimension-free estimates for the discrete Hardy–Littlewood maximal functions (praca* [H4]*)***. Poniżej stosujemy notację wprowadzoną w rozdziale 4.3.4.

Celem **[H4]** jest badanie zależności między najlepszymi stałymi w oszacowaniach mocnego i słabego typu dla operatorów stowarzyszonych z ciałami na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{Z}^n$. Otrzymujemy trzy wyniki tego typu.

Główny wynik **[H4]** mówi, że optymalne stałe na $\mathbb{R}^n$ są nie większe niż ich odpowiedniki na $\mathbb{Z}^n$.

Twierdzenie 4.5. *Ustalmy $n \in \mathbb{Z}_+$ i symetryczne ciało wypukłe $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Dla każdego $p \in [1, \infty]$ mamy*

$$\mathcal{C}(G, p) \le \mathfrak{C}(G, p). \tag{4.12}$$

Ponadto w przypadku kostek $B^{n,\infty}$ i nierówności słabego typu $(1, 1)$ mamy

$$\mathcal{C}(B^{n,\infty}, 1) = \mathfrak{C}(B^{n,\infty}, 1). \tag{4.13}$$

Szkic dowodu (4.12) wygląda następująco. Weźmy nieujemną funkcję gładką $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prawie wybijającą $\mathcal{C}(G, p)$. Ponieważ na $\mathbb{R}^n$ dostępne są dylatacje, możemy założyć, że f jest bardzo wolno zmieniająca się. Spróbkujmy f w punktach kratowych i zdefiniujmy $F \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$. Z własności f wynika, że normy f oraz F są prawie równe. Zauważmy, że $\mathcal{M}^G_* f$ nie może być znacząco większa niż $\mathfrak{M}^G_* F$. Istotnie, jeśli f zmienia się powoli, to $\mathcal{M}^G_* f$ również. Ponadto dla $m \in \mathbb{Z}^n$ mamy, że $\mathcal{M}^G_t F(m)$ nie może znacząco przekroczyć $F(m)$, chyba że skala t jest duża. Z kolei jeśli t jest duża, to zbiór $G_t \cap \mathbb{Z}^n$ staje się regularny, co powoduje, że $\mathcal{M}^G_t f(m)$ oraz $\mathfrak{M}^G_t F(m)$ są prawie równe. Stąd stała w nierówności maksymalnej powiązanej z F wynosi przynajmniej prawie $\mathcal{C}(G, p)$. Widzimy zatem, że (4.12) zachodzi.

Poniżej zamieszczamy kilka uwag dotyczących twierdzenia 4.5.

(i) Oczywiście $\mathcal{C}(G, \infty) = \mathfrak{C}(G, \infty) = 1$.
(ii) Nierówność (4.12) potwierdza znane zjawisko w analizie harmonicznej, mówiące o tym, że znajdowanie oszacowań jest trudniejsze dla operatorów dyskretnych niż dla ich ciągłych odpowiedników.
(iii) Z [2] wynika, że (4.13) implikuje $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{C}(B^{n,\infty}, 1) = \infty$. Ponadto z oszacowań $\mathcal{C}(B^{n,\infty}, 1)$ uzyskanych w [35] wnioskujemy, że wartości $\mathfrak{C}(B^{n,\infty}, 1)$ rosną przynajmniej tak szybko jak $n^{1/4}$.
(iv) Z [54] wynika, że (4.13) dla $n = p = 1$ implikuje $\mathfrak{C}(B^{1,\infty}, 1) = \mathfrak{C}(B^{1,2}, 1) = \frac{11+\sqrt{61}}{12}$.
(v) Struktura produktowa $B^{n,\infty}$ oraz założenie $p = 1$ są istotne dla dowodu (4.13). Z [19] wynika, że oszacowanie (4.13) dla ustalonego $p \in (1, \infty)$ i wszystkich G jest fałszywe. Nie wiadomo, czy $\mathcal{C}(B^{n,\infty}, p) = \mathfrak{C}(B^{n,\infty}, p)$ zachodzi dla $p \in (1, \infty)$.

Drugi wynik **[H4]** dotyczy dyskretnych kul $B^{n,q}_t \cap \mathbb{Z}^n$ dla $q \in (2, \infty)$ i dużych skal t.

Twierdzenie 4.6. *Niech $p \in (1, \infty)$ i $q \in (2, \infty)$. Istnieje $\mathfrak{C}_{p,q} \in \mathbb{R}_+$, taka że dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$ mamy*

$$\|\mathfrak{M}^{B^{n,q}}_{*,\ge n} f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)} \le \mathfrak{C}_{p,q} \|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)}, \qquad f \in \ell^p(\mathbb{Z}^n).$$

Dowód twierdzenia 4.6 opiera się na metodach z [19, Section 5], nierówności Hannera i uogólnionym twierdzeniu dwumianowym Newtona. Tak naprawdę można też wziąć przedział $t \in [an, \infty)$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}_+$ kosztem zastąpienia $\mathfrak{C}_{p,q}$ stałą zależną także od a. Z [19, Theorem 2] wynika, że odpowiednik twierdzenia 4.6 dla $q = 2$ i przedziału $t \in [an, \infty)$ jest prawdziwy przy odpowiednio dużym a. Dowód twierdzenia 4.6 można łatwo dostosować do tego przypadku.

Trzeci wynik **[H4]** dotyczy dyskretnych kul $B^{n,q}_t \cap \mathbb{Z}^n$ dla $q \in [2, \infty)$ i diadycznych skal t.

Twierdzenie 4.7. *Niech $p = 2$ i $q \in [2, \infty)$. Dla $a, a' \in \mathbb{R}_+$ niech $\mathbb{D}_{a,a'} := \{t \in \mathbb{D} : an^{1/q} \le t \le a'n\}$. Istnieje $\mathfrak{C}_{q,a,a'} \in \mathbb{R}_+$, taka że dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$ mamy*

$$\|\mathfrak{M}^{B^{n,q}}_{*,\mathbb{D}_{a,a'}} f\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} \le \mathfrak{C}_{q,a,a'} \|f\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)}, \qquad f \in \ell^2(\mathbb{Z}^n).$$

Ten wynik jest krokiem w kierunku udowodnienia następującej hipotezy.

Hipoteza 4.8. *Niech $p \in (1, \infty)$ i $q \in [2, \infty]$. Wówczas $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{C}(B^{n,q}, p) < \infty$.*

Twierdzenie 4.7 uogólnia [18, Theorem 2.2] sformułowane dla $q = 2$. Nasz dowód opiera się na metodach z [18, Section 2]. Istotnie, wykorzystujemy niezmienniczość $B^{n,q} \cap \mathbb{Z}^n$ względem grupy permutacji $[n]$, a także korzystamy z metod probabilistycznych na tej grupie, aby sprowadzić problem do tzw. *sztuczki zmniejszania wymiaru*, która pozwala nam wyrazić n-wymiarowy operator jako kombinację operatorów n'-wymiarowych z właściwym $n' < n$ kosztem dopisania odpowiednio kontrolowanego błędu.

4.3.10. ***Sharp constants in inequalities admitting the Calderón transference principle (praca* [H5]*)*.** Poniżej stosujemy notację wprowadzoną w rozdziale 4.3.5.

Cel **[H5]** jest dwojaki. Po pierwsze udowadniamy, że zasada transferencji Calderóna [21] może być stosowana na tyle ogólnie, by objąć scenariusz zakładany w hipotezie 4.1 z dowolnym odwzorowaniem $\mathcal{O}$ spełniającym (4.8) oraz bez zwiększania stowarzyszonej stałej. Po drugie korzystamy z tej ostatniej informacji, aby zauważyć pewną dychotomię dotyczącą optymalnych stałych w nierównościach dla $T_*^{\mathrm{os}}, T_*^{\mathrm{c}}, T_*^{\mathrm{u}}$.

Dla krotki $\vec{p} = (p, p_1, \ldots, p_L) \in (0, \infty)^{L+1}$ spełniającej $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_L} = \frac{1}{p}$ badamy nierówności

$$\|\mathcal{O}((F_M)_{M\in\mathbb{Z}_+})\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{X})} \le C \prod_{l\in[L]} \|f_l\|_{\mathcal{L}^{p_l}(\mathcal{X})} \quad \text{oraz} \quad \|\mathcal{O}((F_M)_{M\in\mathbb{Z}_+})\|_{\mathcal{L}^{p,\infty}(\mathcal{X})} \le C \prod_{l\in[L]} \|f_l\|_{\mathcal{L}^{p_l}(\mathcal{X})},$$

gdzie $\mathcal{O}((F_M)_{M\in\mathbb{Z}_+})$ oznacza funkcję $x \mapsto \mathcal{O}((\mathcal{A}_M^{\mathcal{T},\mathcal{P}} \vec{f}(x))_{M\in\mathbb{Z}_+})$ dla $\vec{f} \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathcal{X}) \times \cdots \times \mathcal{L}^{p_m}(\mathcal{X})$. Niech $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}}(\mathcal{X}, \vec{p}, \mathrm{s})$ oraz $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}}(\mathcal{X}, \vec{p}, \mathrm{w})$ będą najmniejszymi stałymi $C \in [0, \infty]$ spełniającymi te nierówności.

Naszym punktem odniesienia jest n-wymiarowy układ kanoniczny $\mathcal{X}_n = (\mathbb{Z}^n, 2^{\mathbb{Z}^n}, \#_n, \mathcal{T}_n)$, czyli $\mathbb{Z}^n$ z σ-ciałem wszystkich podzbiorów, miarą liczącą oraz $\mathcal{T}_n = (T_{n,i})_{i\in[n]}$, gdzie

$$T_{n,i}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots a_n) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \ldots a_n), \qquad (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Pierwszy główny wynik **[H5]** to uogólnienie [43, Proposition 3.2(ii)].

Twierdzenie 4.9. *Dla $\vec{p}, \mathcal{X}, \mathcal{T}, \mathcal{P}$ jak wyżej z ustalonymi K, M, n mamy*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}}(\mathcal{X}, \vec{p}, \mathrm{s}) \le \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{T}_n,\mathcal{P}}(\mathcal{X}_n, \vec{p}, \mathrm{s}) \quad \textit{oraz} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}}(\mathcal{X}, \vec{p}, \mathrm{w}) \le \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\mathcal{T}_n,\mathcal{P}}(\mathcal{X}_n, \vec{p}, \mathrm{w}) \tag{4.14}$$

dla wszystkich $\mathcal{O}$ spełniających (4.8), gdzie $\mathcal{X}_n$ jest n-wymiarowym układem kanonicznym.

Odtąd niech $K = L = n = 1$, $T_1 = T$ i $P_1 = \mathrm{id}$. Badamy oszacowania słabego typu $(1,1)$ i mocnego typu (p,p) dla T_*^{os}. Zdefiniujmy $\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, 1) := \mathcal{C}_{T_*^{\mathrm{os}}}^{T,\mathrm{id}}(\mathcal{X}, (1,1), \mathrm{w})$ i $\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, p) := \mathcal{C}_{T_*^{\mathrm{os}}}^{T,\mathrm{id}}(\mathcal{X}, (p,p), \mathrm{s})$ dla $p \in (1, \infty)$. Definiujemy $\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, \infty)$ podobnie, odnosząc się do nierówności $\|T_*^{\mathrm{os}} f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})} \le C\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X})}$. Ponadto definiujemy tak samo $\mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, p)$ i $\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}, p)$ dla $p \in [1, \infty]$, używając T_*^{c} i T_*^{u} zamiast T_*^{os}.

Niech $\mathcal{X}$ będzie nietrywialny, czyli $0 < \mu(E) < \infty$ dla pewnego $E \subseteq X$, i *ergodyczny*, czyli $T^{-1}(E) = E$ implikuje $\mu(E) = 0$ lub $\mu(X \setminus E) = 0$. Dla takiego $\mathcal{X}$ mówimy, że X ma skończenie wiele atomów, jeśli dzieli się na rozłączne mierzalne zbiory $X_0, X_1, \ldots, X_I$, $I \in \mathbb{Z}_+$, takie że $\mu(X_0) = 0$, $T(X_i) \subseteq X_{i+1}$ dla $i \in [I-1]$, $T(X_I) \subseteq X_1$, i żaden X_i, $i \in [I]$, nie dzieli się na rozłączne zbiory o niezerowej mierze.

Dla układu $\mathcal{X}$ jak wyżej zachodzi następująca dychotomia znana jako lemat Kakutaniego–Rokhlina:

(A) zbiór X ma skończenie wiele atomów,

(B) dla każdego $I \in \mathbb{Z}_+$ istnieje $E_I \subseteq X$, taki że $0 < \mu(E_I) < \infty$ oraz $T^{-i}(E_I)$, $i \in [I]$, są rozłączne.

Drugim głównym wynikiem **[H5]** jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.10. *Dla nietrywialnego układu ergodycznego $\mathcal{X}$ jak wyżej jeśli $p \in \{1, \infty\}$, to $\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, p) = \mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}_1, p)$, a jeśli $p \in (1, \infty)$, to mamy następującą dychotomię:*

- *jeśli zachodzi (A), to $\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, p) < \mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}_1, p)$,*
- *jeśli zachodzi (B), to $\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, p) = \mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}_1, p)$.*

Podobnie jeśli $p = \infty$, to $\mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \infty) = \mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}_1, \infty)$ oraz $\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}, \infty) = \mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}_1, \infty)$, a jeśli $p \in [1, \infty)$, to mamy następującą dychotomię:

- *jeśli zachodzi (A), to $\mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, p) < \mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}_1, p)$ i $\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}, p) < \mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}_1, p)$,*
- *jeśli zachodzi (B), to $\mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, p) = \mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}_1, p)$ i $\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}, p) = \mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}_1, p)$.*

Jeśli w szczególności zachodzi (B), to

- *$\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, 1) = 1$, $\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}, 1) = 2$, i $\mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, 1) = \frac{11+\sqrt{61}}{12}$, por.* [54],
- *$\mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}, p) = c_p$, $p \in (1, \infty)$, gdzie $c_p \in \mathbb{R}_+$ jest rozwiązaniem $(p-1)x^p - px^{p-1} - 1 = 0$, por.* [33],
- *$\mathcal{C}^{\mathrm{os}}(\mathcal{X}, \infty) = \mathcal{C}^{\mathrm{u}}(\mathcal{X}, \infty) = \mathcal{C}^{\mathrm{c}}(\mathcal{X}, \infty) = 1$.*

Aby udowodnić twierdzenie 4.10, w szczególności ostatnią część, posługujemy się schematem poniżej.

(1) Pokazujemy związki między operatorami Hardy'ego–Littlewooda na $\mathbb{Z}$ i operatorami $T_*^{\mathrm{os}}, T_*^{\mathrm{c}}, T_*^{\mathrm{u}}$.

(2) Pokazujemy, że stałe Hardy'ego–Littlewooda na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Z}$ są równe dla badanych przypadków.

(3) Przypominamy pomysły użyte do obliczenia stałych Hardy'ego–Littlewooda na $\mathbb{R}$, zob. [33] i [54].

(4) Znajdujemy ostre warunki na $\mathcal{X}$ niezbędne do użycia tych pomysłów w kontekście ergodycznym.

4.3.11. ***Pozostałe wyniki.***

- **[P1]** D. Kosz, *On relations between weak and strong type inequalities for maximal operators on non-doubling metric measure spaces*, Publ. Mat. **62** (2018), 37–54. 10.5565/PUBLMAT6211802
- **[P2]** D. Kosz, *On relations between weak type and restricted weak type inequalities for maximal operators on non-doubling metric measure spaces*, Studia Math. **241** (2018), 57–70. 10.4064/sm8724-5-2017
- **[P3]** D. Kosz, *On relations between weak and strong type inequalities for modified maximal operators on non-doubling metric measure spaces*, Forum Math. **31** (2019), 785–801. 10.1515/forum-2018-0126
- **[P4]** D. Kosz, *Dichotomy property for maximal operators in nondoubling setting*, Bull. Aust. Math. Soc. **99** (2019), 454–466. 10.1017/S000497271800120X
- **[P5]** D. Kosz, BMO *spaces for nondoubling metric measure spaces*, Publ. Mat. **64** (2020), 103–119. 10.5565/PUBLMAT6412004
- **[P6]** D. Kosz, *Maximal operators on Lorentz spaces in non-doubling setting*, Math. Z. **298** (2021), 1523–1543. 10.1007/s00209-020-02650-1
- **[P7]** D. Kosz, *Boundedness properties of maximal operators on Lorentz spaces*, Ann. Fenn. Math. **48** (2023), 515–535. 10.54330/afm.131758
- **[P8]** D. Kosz, *A_∞ condition for general bases revisited: complete classification of definitions*, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), 3831–3839. 10.1090/proc/16014
- **[P9]** D. Hanrahan, D. Kosz, *Sharp estimates for Jacobi heat kernels in conic domains*, J. Approx. Theory **293** (2023), no. 105921, 1–11. 10.1016/j.jat.2023.105921
- **[P10]** D. Kosz, *On the doubling condition in the infinite-dimensional setting*, Bull. Aust. Math. Soc. **108** (2023), 480–491. 10.1017/S0004972723000011
- **[P11]** D. Kosz, G. Rey, L. Roncal, *Weak-type maximal function estimates on the infinite-dimensional torus*, Math. Z. **150** (2023), no. 43, 1–14. 10.1007/s00209-023-03302-w
- **[P12]** C. González-Riquelme, D. Kosz, *The maximal function of the Devil's staircase is absolutely continuous*, J. Geom. Anal. **34** (2024), no. 131, 1–13. 10.1007/s12220-024-01562-4
- **[S1]** D. Kosz, B. Langowski, M. Mirek, P. Plewa, *Polynomial ergodic theorems in the spirit of Dunford and Zygmund*, preprint (2023), 1–26. arxiv.org/abs/2304.03802

Prace **[P1]**–**[P7]** wchodzą w skład mojej rozprawy doktorskiej i są omawiane zbiorczo w rozdziale 4.3.12. Pozostałe artykuły **[P8]**–**[P12]** oraz preprint **[S1]** są omawiane odpowiednio w rozdziałach 4.3.13–4.3.18.

4.3.12. ***Maximal operators in nondoubling metric measure spaces (prace* [P1]–[P7]*).*** Gdy w latach 2015–2019 byłem doktorantem na Politechnice Wrocławskiej, głównym celem moich badań było opisanie własności operatorów maksymalnych Hardy'ego–Littlewooda w kontekście przestrzeni niedublujących. W 2019 r. obroniłem z wyróżnieniem rozprawę doktorską *Maximal operators in non-doubling metric measure spaces*, której promotorem był prof. dr hab. Krzysztof Stempak.

Rozdział 1 jest wprowadzeniem do tematyki badań. Pozostałe części rozprawy omawiamy poniżej.

W rozdziale 2 badamy nierówności mocnego, słabego i restrykcyjnie słabego typu (p,p). Na pytanie

Dla jakich przedziałów p operatory $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ i $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}$ spełniają trzy wspomniane typy nierówności?

udzielamy pełnej odpowiedzi, wymieniając wszystkie możliwości. Rozważamy w tym celu sześć zbiorów

$$P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X}), P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}), P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}), P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X}), P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}), P_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}) \in [1,\infty],$$

oznaczających zakresy p, w których dany operator spełnia daną nierówność, a następnie opisujemy wszystkie możliwe ich konfiguracje. Tym samym uzupełniamy wcześniejsze wyniki, zob. [63] i [46, 47, 48]. Następujące twierdzenie podsumowuje wyniki z **[P1]** i **[P2]**.

Twierdzenie 4.11. *Dla $\mathfrak{X}$ zbiory $P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X}), P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}), P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}), P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X}), P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}), P_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X})$ spełniają poniższe warunki.*

(1) Każdy z nich ma postać $\{\infty\}$, $(p_0,\infty]$ lub $[p_0,\infty]$ dla pewnego $p_0 \in [1,\infty)$.
(2) Mamy $P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X}) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X})$, $P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X})$ oraz $P_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X})$.
(3) Mamy $P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X}) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}) \subseteq \overline{P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X})}$ oraz $P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X}) \subseteq P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}) \subseteq P_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}) \subseteq \overline{P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X})}$.
(4) Mamy $P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}) = [1,\infty] \implies P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}) = [1,\infty]$ oraz $P_{\mathrm{r}}(\mathfrak{X}) = [1,\infty] \implies P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X}) = [1,\infty]$.

Na odwrót, każdą konfigurację sześciu zbiorów spełniających (1)–(4) realizuje pewna niedublująca $\mathfrak{X}$.

W rozdziale 3 badamy *zmodyfikowane operatory maksymalne*. Dla $\kappa \in [1,\infty)$ i $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X})$ zdefiniujmy

$$\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X},\kappa} f(x) := \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \frac{1}{\mu(B(x,\kappa r))} \int_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\mu \quad \text{oraz} \quad \mathcal{M}_{\mathfrak{X},\kappa} f(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(\kappa B)} \int_B |f| \,\mathrm{d}\mu, \qquad x \in X,$$

gdzie κB oznacza kulę koncentryczną z B o promieniu κ razy większym. Operatory tego typu wprowadzili Nazarov, Treil i Volberg [56]. Były one również rozważane w [62] i [65, 66]. W szczególności wiadomo, że $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X},2}$ i $\mathcal{M}_{\mathfrak{X},3}$ zawsze są słabego typu $(1,1)$. W **[P3]** rozważamy cztery zbiory parametrów

$$P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa), P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa), P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa), P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa) \in [1,\infty]$$

dla każdego ustalonego κ i opisujemy wszystkie możliwe ich konfiguracje.

Twierdzenie 4.12. *Dla $\mathfrak{X}$ gdy $\kappa \geq 1$, to $P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa), P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa), P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa), P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa)$ spełniają poniższe warunki.*

(1) Każdy z nich ma postać $\{\infty\}$, $(p_0,\infty]$ lub $[p_0,\infty]$ dla pewnego $p_0 \in [1,\infty)$.
(2) Mamy $P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa)$ i $P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa)$.
(3) Mamy $P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa) \subseteq P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa) \subseteq \overline{P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa)}$ oraz $P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa) \subseteq P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa) \subseteq \overline{P_{\mathrm{s}}(\mathfrak{X},\kappa)}$.
(4) Mamy $P^{\mathrm{c}}_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa) = [1,\infty]$ dla $\kappa \geq 2$ oraz $P_{\mathrm{w}}(\mathfrak{X},\kappa) = [1,\infty]$ dla $\kappa \geq 3$.

Na odwrót, każdą konfigurację czterech zbiorów spełniających (1)–(4) realizuje pewna niedublująca $\mathfrak{X}$.

Rozdział 4 jest kulminacją rozprawy. Dla ustalonego $p \in (1,\infty)$ badamy własności $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ poprzez analizę jego ograniczoności z $\mathcal{L}^{p,q}(\mathfrak{X})$ do $\mathcal{L}^{p,r}(\mathfrak{X})$ dla wszystkich $q,r \in [1,\infty]$. Wprowadzamy klasę przestrzeni, inspirując się tymi badanymi w [66], dla których zakresy ograniczoności są bardzo szczególne. W efekcie przy niewielkich naturalnych założeniach na $\mathfrak{X}$ opisujemy wszystkie możliwe kształty zbiorów

$$\Omega^p_{\mathrm{HL}}(\mathfrak{X}) := \left\{ \left(\tfrac{1}{q},\tfrac{1}{r}\right) \in [0,1]^2 : \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} \text{ jest ograniczony z } \mathcal{L}^{p,q}(\mathfrak{X}) \text{ do } \mathcal{L}^{p,r}(\mathfrak{X}) \right\} \subseteq [0,1]^2.$$

Następujące twierdzenie podsumowuje wyniki z **[P6]** i **[P7]**. Wspomnijmy, że to samo zachodzi dla $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}$.

Twierdzenie 4.13. *Ustalmy $p \in (1,\infty)$. Niech $\operatorname{supp}(\mu) := \{x \in X : \mu(B(x,s)) > 0$ dla każdego $s \in \mathbb{R}_+\}$ dla danej przestrzeni $\mathfrak{X}$. Jeśli $\mu(X \setminus \operatorname{supp}(\mu)) = 0$, to zachodzi następująca dychotomia.*

- *Brzeg $\Omega^p_{\mathrm{HL}}(\mathfrak{X})$ jest pusty, czyli $\Omega^p_{\mathrm{HL}}(\mathfrak{X}) = \emptyset$ lub $\Omega^p_{\mathrm{HL}}(\mathfrak{X}) = [0,1]^2$.*
- *Brzeg $\Omega^p_{\mathrm{HL}}(\mathfrak{X})$ ma postać $\{\delta\} \times [0, \lim_{u \to \delta} F(u)] \cup \{(u,F(u)) : u \in (\delta,1]\}$ gdzie $\delta \in [0,1]$ oraz $F\colon [\delta,1] \to [0,1]$ jest wklęsła, niemalejąca i spełniająca $F(u) \leq u$.*

Na odwrót, dla każdej F jak wyżej istnieje taka $\mathfrak{X}$, że $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ jest ograniczony z $\mathcal{L}^{p,q}(\mathfrak{X})$ do $\mathcal{L}^{p,r}(\mathfrak{X})$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt $(\frac{1}{q},\frac{1}{r})$ leży na lub pod wykresem funkcji F, czyli $\frac{1}{q} \geq \delta$ i $\frac{1}{r} \leq F(\frac{1}{q})$.

W rozdziale 5 badamy przestrzenie $\mathrm{BMO}^p(\mathfrak{X})$ funkcji o skończonej średniej p-oscylacji dla $p \in [1,\infty)$ (por. [53]). W **[P5]** opisujemy wszystkie możliwe relacje pomiędzy tymi przestrzeniami rozumianymi jako zbiory funkcji. Zawieramy też pewne dalsze rozważania związane z nierównością Johna–Nirenberga [39].

Twierdzenie 4.14. *Dla $\mathfrak{X}$ zachodzi następująca dychotomia dotycząca $\mathrm{BMO}^p(\mathfrak{X})$ dla $p \in [1,\infty)$.*

- *Wszystkie te przestrzenie pokrywają się.*
- *Istnieje $p_0 \in (1,\infty)$ (ew. $p_0 \in [1,\infty)$), takie że $\mathrm{BMO}^p(\mathfrak{X}) = \mathrm{BMO}^1(\mathfrak{X})$ dla $p < p_0$ (ew. $p \leq p_0$) oraz $\mathrm{BMO}^{p_1}(\mathfrak{X}) \subsetneq \mathrm{BMO}^{p_2}(\mathfrak{X})$ dla $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ i $p_2 \geq p_0$ (ew. $p_2 > p_0$).*

Na odwrót, każdą sytuację opisaną wyżej (z dowolnym p_0) realizuje pewna niedublująca $\mathfrak{X}$.

W rozdziale 6 przypominamy następującą dychotomię. Jeśli $\mathfrak{X}$ jest dublująca, to dla każdej $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{X})$ mamy $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f \equiv \infty$ albo $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}} f < \infty$ prawie wszędzie, zob. [6], [32] i [1]. W **[P4]** badamy niedublujące $\mathfrak{X}$.

Twierdzenie 4.15. *Można skonstruować cztery niedublujące $\mathfrak{X}$ realizujące każdy ze scenariuszy w odniesieniu do wystąpienia lub braku wystąpienia powyższej dychotomii przy jednoczesnym badaniu $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ i $\mathcal{M}_{\mathfrak{X}}$.*

W dodatku przedstawiamy elementarny dowód pomocniczego twierdzenia interpolacyjnego dla $\mathcal{L}^{p,q}(\mathfrak{X})$ przy stałym p. Autorowi nie jest znany żaden wcześniejszy elementarny dowód tego twierdzenia.

Twierdzenie 4.16. *Ustalmy $p \in [1,\infty)$, $1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty$ i $1 \leq r_0, r_1 \leq \infty$ spełniające $q_0 \leq r_0$ i $q_1 \leq r_1$. Dla $\mathfrak{X}$ załóżmy, że $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ jest ograniczony z $\mathcal{L}^{p,q_i}(\mathfrak{X})$ do $\mathcal{L}^{p,r_i}(\mathfrak{X})$ dla $i \in \{0,1\}$. Dla $\theta \in (0,1)$ niech*

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad \textit{oraz} \quad \frac{1}{r_\theta} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Wówczas $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathfrak{X}}$ jest ograniczony z $\mathcal{L}^{p,q_\theta}(\mathfrak{X})$ do $\mathcal{L}^{p,r_\theta}(\mathfrak{X})$.

4.3.13. A_∞ ***condition for general bases revisited: complete classification of definitions (praca* [P8]*).*** W tym artykule badamy operatory maksymalne stowarzyszone z bazami różniczkowania, zob. rozdział 4.3.3.

Duoandikoetxea, Martín-Reyes i Ombrosi [29] rozpoczęli dyskusję na temat dwunastu różnych definicji warunku A_∞. W przypadku kostek w $\mathbb{R}^n$ każde dwa warunki są równoważne, ale dla ogólnych baz może zajść równoważność, jednostronna implikacja albo brak zależności. Dla większości par odpowiednia relacja została już ustalona w [29]. W **[P8]** zajmujemy się wszystkimi pozostałymi przypadkami.

Dla σ-skończonej przestrzeni miarowej (X, Σ, μ) i $E \in \Sigma$ piszemy $|E| := \mu(E)$. Dla bazy $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$, takiej że $0 < |B| < \infty$ dla każdego $B \in \mathcal{B}$, następujące definicje stwierdzenia $w \in A_\infty^{\mathcal{B}}(X)$ są rozważane w [29].

(D1) Istnieją $p \in (1, \infty)$ oraz $C_p \in \mathbb{R}_+$, takie że dla $p^* := \frac{p}{p-1}$ i każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy

$$\Big(|B|^{-1} \int_B w \, \mathrm{d}\mu\Big)\Big(|B|^{-1} \int_B w^{1-p^*} \, \mathrm{d}\mu\Big)^{p-1} \le C_p.$$

(D$\tilde{1}$) Istnieją $\delta, C \in \mathbb{R}_+$, takie że $\frac{|E|}{|B|} \le C\big(\frac{w(E)}{w(B)}\big)^\delta$ dla każdego $B \in \mathcal{B}$ i każdego μ-mierzalnego $E \subseteq B$.

(D2) Istnieje $C \in \mathbb{R}_+$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy

$$|B|^{-1} \int_B w \, \mathrm{d}\mu \le C \exp\Big\{|B|^{-1} \int_B \log w \, \mathrm{d}\mu\Big\}.$$

(D$\tilde{2}$) Istnieje $C \in \mathbb{R}_+$, takie że dla każdego $s \in (0, 1)$ i każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy

$$|B|^{-1} \int_B w \, \mathrm{d}\mu \le C\Big(|B|^{-1} \int_B w^s \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/s}.$$

(D3) Istnieją $q \in (1, \infty)$ oraz $C_q \in \mathbb{R}_+$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy

$$\Big(|B|^{-1} \int_B w^q \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/q} \le C_q |B|^{-1} \int_B w \, \mathrm{d}\mu.$$

(D$\tilde{3}$) Istnieją $\delta, C \in \mathbb{R}_+$, takie że $\frac{w(E)}{w(B)} \le C\big(\frac{|E|}{|B|}\big)^\delta$ dla każdego $B \in \mathcal{B}$ i każdego μ-mierzalnego $E \subseteq B$.

(D4) Istnieją $\alpha, \beta \in (0, 1)$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ i każdego μ-mierzalnego $E \subseteq B$ mamy

$$|E| < \alpha |B| \implies \mu(E) \le \beta \mu(B).$$

(D$\tilde{4}$) Istnieją $\alpha, \beta \in (0, 1)$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ oraz $w_B := w(B)/|B|$ mamy

$$|\{x \in B : w(x) \le \alpha w_B\}| \le \beta |B|.$$

(D5) Istnieje $C \in \mathbb{R}_+$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy

$$w_B \le C \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : 2|\{x \in B : w(x) > t\}| < |B|\}.$$

(D6) Istnieje $C \in \mathbb{R}_+$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy $\int_B w \log^+(w/w_B) \, \mathrm{d}\mu \le C w(B)$.

(D7) Istnieje $C \in \mathbb{R}_+$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy $\int_B \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w \mathbb{1}_B) \, \mathrm{d}\mu \le C w(B)$.

(D8) Istnieją $C, \beta \in \mathbb{R}^+$, takie że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ jeśli $\lambda > w_B$, to

$$w(\{x \in B : w(x) \ge \lambda\}) \le C\lambda \, |\{x \in B : w(x) \ge \beta\lambda\}|.$$

Z [29] wynika, że **(DI)** i **(D$\tilde{\mathbf{I}}$)** są równoważne dla każdego $\mathbf{I} \in [4]$. W **[P8]** dostajemy następujący wynik.

Twierdzenie 4.17. *Tabela poniżej opisuje, czy* **(DI)** *z pierwszej kolumny implikuje* **(DJ)** *z pierwszego rzędu dla każdej pary* $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}\} \in [8]^2$. *Symbol* $[\,\cdot\,]$ *oznacza, że wynik nie był wcześniej znany.*

$\implies$	**(D1)**	**(D2)**	**(D3)**	**(D4)**	**(D5)**	**(D6)**	**(D7)**	**(D8)**
(D1)	✓	✓	✗	✓	✓	✗	[✗]	✗
(D2)	✗	✓	✗	✓	✓	✗	[✗]	✗
(D3)	✗	✗	✓	✓	✗	✓	[✗]	✗
(D4)	✗	✗	✗	✓	✗	✗	[✗]	✗
(D5)	✗	[✗]	✗	✓	✓	✗	[✗]	✗
(D6)	✗	✗	✗	✓	✗	✓	[✗]	✗
(D7)	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗
(D8)	✗	✗	✓	✓	✗	✓	[✗]	✓

4.3.14. ***Sharp estimates for Jacobi heat kernels in conic domains (praca* [P9]*).*** W tym artykule nie badamy operatorów maksymalnych.

W **[P9]** podajemy prawdziwie ostre oszacowania dla jądra ciepła Jacobiego na wielowymiarowym stożku i jego powierzchni. Łączymy tu teorię wielomianów Jacobiego na stożku zbadaną przez Xu [70] z pewnymi nowymi metodami opracowanymi przez Nowaka, Sjögrena i Szarka [59] dla sferycznego jądra ciepła.

Opiszmy teorię zgodnie z [28, Section 3] i [70, Section 1]. Dla odpowiedniej wagi ϖ na dziedzinie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ można zbudować bazę ortogonalną wielomianów w przestrzeni $\mathcal{L}^2(\Omega, \varpi)$. Dla każdego $r \in \{0, 1, \dots\}$, niech $\mathcal{V}_r(\varpi)$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{L}^2(\Omega, \varpi)$ rozpiętą przez wszystkie wektory bazowe będące wielomianami stopnia r. Wówczas rzut ortogonalny $\operatorname{proj}_r \colon \mathcal{L}^2(\Omega, \varpi) \to \mathcal{V}_r(\varpi)$ przyjmuje postać

$$\operatorname{proj}_r f(x) := \int_\Omega f(y) P_r(\varpi; x, y)\, \mathrm{d}\varpi(y)$$

dla pewnej funkcji $P_r(\varpi; \cdot, \cdot) \colon \Omega^2 \to \mathbb{R}$ zwanej *jądrem reprodukującym* $\mathcal{V}_r(\varpi)$. Załóżmy, że mamy liniowy operator różniczkowy drugiego rzędu $\mathcal{D}$, którego funkcjami własnymi są wszystkie wielomiany bazowe, a wartości własne $\lambda_r^{\mathcal{D}}$ zależą tylko od r. Dla $\tau \in (0, \infty)$ definiujemy *jądro ciepła* powiązane z $\mathcal{D}$ wzorem

$$h_\tau(\varpi; x, y) := \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\tau \lambda_r^{\mathcal{D}}} P_r(\varpi; x, y).$$

Dla wielowymiarowego stożka i jego powierzchni obiekty te zostały wprowadzone w [70]. Niech

$$\mathbb{V}^{n+1} := \big\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\| \le t,\ t \in [0, 1]\big\} \quad \text{oraz} \quad W_{\mu,\gamma}(x, t) := (t^2 - \|x\|^2)^{\mu - \frac{1}{2}} (1 - t)^\gamma$$

będą stożkiem i powiązaną wagą, gdzie $\|x\| := \|x\|_{\ell^2}$, zaś $\mu \in [0, \infty)$ i $\gamma \in [-\frac{1}{2}, \infty)$ są ustalone. Wówczas

$$(1 - t)(t\partial_t^2 + 2\langle x, \nabla_x \rangle \partial_t) + \sum_i (t - x_i^2)\partial_{x_i}^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} + (2\mu + d)\partial_t - \nu(\langle x, \nabla_x \rangle + t\partial_t)$$

to powiązany operator $\mathcal{D}_{\mu,\gamma}$, gdzie ∇_x to gradient w kierunku x, zaś $\nu := 2\mu + \gamma + n + 1$. Podobnie niech

$$\mathbb{V}_0^{n+1} := \big\{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \|x\| = t,\ t \in [0, 1]\big\} \quad \text{oraz} \quad \varphi_\gamma(t) := t^{-1}(1 - t)^\gamma$$

będą powierzchnią stożka i powiązaną wagą, gdzie $\gamma \in [-\frac{1}{2}, \infty)$ jak wyżej. Wówczas

$$t(1 - t)\partial_t^2 + (n - 1 - t(n + \gamma))\partial_t + t^{-1}\Delta_0^{(x)}$$

to powiązany operator $\mathcal{D}_\gamma$, gdzie $\Delta_0^{(x)}$ to operator Laplace'a–Beltramiego na sferze $\mathbb{S}^{n-1}$ w kierunku x.

Główny wynik **[P9]** wygląda następująco (pomijamy szczegółowy opis P_r).

Twierdzenie 4.18. *Dla $n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$ i $(x, t), (y, s) \in \mathbb{V}^{n+1}$ niech $I_1 := \sqrt{1 - t}\sqrt{1 - s}$, $I_2 := \sqrt{st + \langle x, y \rangle}$ oraz $I_3 := \sqrt{t^2 - \|x\|^2}\sqrt{s^2 - \|y\|^2}$. Jądro ciepła $h_\tau(W_{\mu,\gamma}; (x, t), (y, s))$ na $\mathbb{V}^{n+1}$ jest porównywalne z*

$$\tau^{-\frac{n+1}{2}} (I_1 + \tau)^{-\gamma - \frac{1}{2}} (I_2 + \tau)^{-\mu - \frac{n-1}{2}} (I_3/I_2 + \tau)^{-\mu} \exp\Big\{ -\tfrac{1}{\tau} \arccos^2 \big((I_2^2/2 + I_3/2)^{1/2} + I_1 \big) \Big\}$$

dla $\tau \in (0, 1]$ i $(x, t), (y, s) \in \mathbb{V}^{n+1}$, zaś jądro ciepła $h_\tau(\varphi_\gamma; (x, t), (y, s))$ na $\mathbb{V}_0^{n+1}$ jest porównywalne z

$$\tau^{-\frac{n}{2}} (I_1 + \tau)^{-\gamma - \frac{1}{2}} (I_2 + \tau)^{-\frac{n}{2} + 1} \exp\Big\{ -\tfrac{1}{\tau} \arccos^2 \big((I_2^2/2)^{1/2} + I_1 \big) \Big\}$$

dla $\tau \in (0, 1]$ i $(x, t), (y, s) \in \mathbb{V}_0^{n+1}$. Gdy $\tau \in [1, \infty)$, oba jądra są porównywalne z 1.

Poniżej zamieszczamy kilka uwag dotyczących twierdzenia 4.18.

(a) Podane oszacowania są ostre z dokładnością do stałych. Jak dotąd tylko dla kilku przestrzeni otrzymano tak precyzyjny wynik. Inne rezultaty tego typu można znaleźć w [26], [58] i [52].
(b) Wielowymiarowe stożki łączą własności geometryczne odcinków i kul euklidesowych. Dla $n = 1$ zanika komponent euklidesowy i problem upraszcza się, por. [70, Section 2.5].
(c) Oszacowania dla $\tau \in (0, 1]$ są nowe, zaś przypadek $\tau \in [1, \infty)$ wynika z ogólnej teorii. Dla danego $T \in \mathbb{R}_+$ te same wyniki zachodzą w zakresach $(0, T]$ i $[T, \infty)$ z pewnymi stałymi zależnymi od T.
(d) Dowód opiera się na wyrażeniu badanych jąder ciepła w terminach jądra ciepła związanego z klasycznymi rozwinięciami Jacobiego na $[-1, 1]$. Naśladujemy tu dowód z [59], jednak okazuje się, że n-te składniki w naszych jądrach odpowiadają $2n$-tym składnikom w klasycznym jądrze ciepła. Na szczęście możemy sztucznie dodać składniki nieparzyste do wzorów, ponieważ ich całki wynoszą 0. To zjawisko nie występowało w kontekście przestrzeni badanych w [59].

4.3.15. ***On the doubling condition in the infinite-dimensional setting (praca* [P10]*)*.** W tym artykule nie badamy operatorów maksymalnych, ale badamy przestrzeń $\mathbb{T}^\omega$ rozważaną w **[H2]** i **[H3]**.

Kwazimetryką na niepustym zbiorze X jest odwzorowanie $\rho\colon X \times X \to [0, \infty)$ spełniające trzy warunki:

- $\rho(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- $\rho(x, y) \le K(\rho(x, z) + \rho(z, y))$ dla pewnej uniwersalnej stałej $K \in [1, \infty)$.

Jeśli ostatni warunek jest spełniony dla $K = 1$, to ρ jest metryką.

Istnieje kanoniczny sposób wprowadzania topologii $\mathcal{T}_\rho$ na X związanej z ρ. Dla $x \in X$ i $r \in \mathbb{R}_+$ niech

$$B_\rho(x, r) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}.$$

Wtedy $G \subseteq X$ jest *otwarty*, czyli $G \in \mathcal{T}_\rho$, jeśli dla każdego $x \in G$ istnieje $r_x \in \mathbb{R}_+$, taki że $B_\rho(x, r_x) \subseteq G$.

Dla niepustego X, kwazimetryki ρ i miary borelowskiej μ mówimy, że (X, ρ, μ) jest *jednorodna w sensie Coifmana–Weissa* (por. [24]), jeśli $0 < \mu(B_\rho) < \infty$ dla wszystkich kul $B_\rho \subseteq X$ (w szczególności kule muszą być μ-mierzalne) oraz istnieje $C \in [1, \infty)$, taka że

$$\mu(B_\rho(x, 2r)) \le C\mu(B_\rho(x, r)) \qquad x \in X,\ r \in \mathbb{R}_+.$$

W kontekście $X = \mathbb{T}^\omega$ postawione zostało następujące pytanie (por. [30, Nota 2.34]):

Czy możliwe jest uczynienie $\mathbb{T}^\omega$ przestrzenią jednorodną w sensie Coifmana–Weissa?

W **[P10]** pokazujemy, że bez zniszczenia geometrycznej lub topologicznej struktury $\mathbb{T}^\omega$ nie jest to możliwe.

Twierdzenie 4.19. *Dla ograniczonej translacyjnie niezmienniczej kwazimetryki ρ na $\mathbb{T}^\omega$ nie da się znaleźć μ na σ-ciele generowanym przez ρ, takiej że $(\mathbb{T}^\omega, \rho, \mu)$ jest jednorodna w sensie Coifmana–Weissa. Podobnie dla kwazimetryki ρ na $\mathbb{T}^\omega$, dla której $\mathcal{T}_\rho$ pokrywa się ze zwykłą topologią, nie da się znaleźć miary borelowskiej μ, takiej że $(\mathbb{T}^\omega, \rho, \mu)$ jest jednorodna w sensie Coifmana–Weissa.*

4.3.16. ***Weak-type maximal function estimates on the infinite-dimensional torus (praca* [P11]*)*.** W tym artykule badamy operatory maksymalne stowarzyszone z bazami różniczkowania, zob. rozdział 4.3.3.

W **[P11]**, używając pomysłów Córdoby i Feffermana [25], znajdujemy ostre ograniczenia w nierównościach słabego typu (p, p) dla operatora maksymalnego związanego z jedną (ε, l)-konfiguracją wokół $Q \in \mathcal{R}$.

Twierdzenie 4.20. *Niech $\mathcal{S}_0$ będzie (ε, l)-konfiguracją wokół $Q \in \mathcal{R}$. Dla $p \in (1, \infty)$ niech $p^* := \frac{p}{p-1}$ i $A_p(\mathcal{S}_0) := \varepsilon l^{1/p}$. Wówczas istnieje uniwersalna stała $C \in \mathbb{R}_+$, dla której prawdziwe są nierówności.*

(1) Jeśli $A_p(\mathcal{S}_0) \le p^* e^{-p^*}$, to

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^\omega) \to \mathcal{L}^{p,\infty}(\mathbb{T}^\omega)} \le C.$$

(2) Jeśli $p^* e^{-p^*} \le A_p(\mathcal{S}_0) \le p^* e^{-1}$, to

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^\omega) \to \mathcal{L}^{p,\infty}(\mathbb{T}^\omega)} \le Cp^*(\log(p^*/A_p(\mathcal{S}_0)))^{-1}.$$

(3) Jeśli $A_p(\mathcal{S}_0) \ge p^* e^{-1}$, to

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^\omega) \to \mathcal{L}^{p,\infty}(\mathbb{T}^\omega)} \le CeA_p(\mathcal{S}_0).$$

(4) Dla $A(\mathcal{S}_0) := \varepsilon l / \log(\varepsilon^{-1})$ będącego słabszą wersją $A_1(\mathcal{S}_0)$ mamy

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{S}_0}\|_{\mathcal{L}\log\mathcal{L}(\mathbb{T}^\omega) \to \mathcal{L}^{1,\infty}(\mathbb{T}^\omega)} \le C(1 + A(\mathcal{S}_0)).$$

Podane oszacowania są ostre z dokładnością do stałych ograniczonych jednostajnie ze względu na ε, l, p.

Wynika stąd następujący wniosek.

Wniosek 4.21. *Niech $\mathcal{S}$ będzie sumą rozłącznych (ε_j, l_j)-konfiguracji $\mathcal{S}_j$ wokół $Q_j \in \mathcal{R}$ dla $j \in \mathbb{Z}_+$. Niech $A_p(\mathcal{S}) := \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} A_p(\mathcal{S}_j)$ i $A(\mathcal{S}) := \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} A(\mathcal{S}_j)$. Wówczas dla $p \in (1, \infty)$ mamy*

$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^\omega) \to \mathcal{L}^{p,\infty}(\mathbb{T}^\omega)} < \infty \iff A_p(\mathcal{S}) < \infty.$$

Jeśli w szczególności $\varepsilon_j = \frac{1}{j+1}$ i $l_j = \lfloor j^{p_0} \rfloor$ (ew. $l_j = \lfloor \log(j+2) j^{q_0} \rfloor$) dla pewnego $p_0 \in (1, \infty)$, to zakresem zbieżności dla $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ jest dokładnie $[p_0, \infty]$ (ew. $(p_0, \infty]$). Ponadto dla $p = 1$ mamy

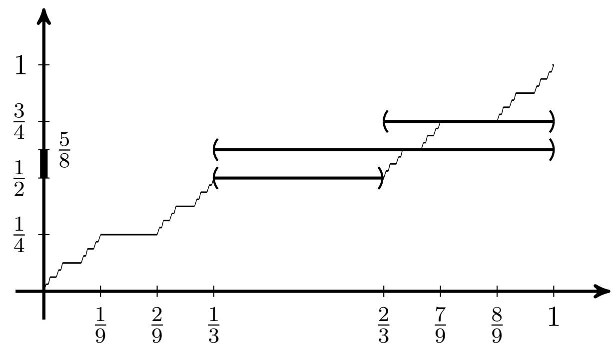
$$\|\mathcal{M}_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{L}\log\mathcal{L}(\mathbb{T}^\omega) \to \mathcal{L}^{1,\infty}(\mathbb{T}^\omega)} < \infty \iff A(\mathcal{S}) < \infty.$$

4.3.17. ***The maximal function of the Devil's staircase is absolutely continuous (praca* [P12]*)***. W tym artykule badamy gładkość funkcji maksymalnych, zob. rozdział 4.3.6.

Z [3] wynika, że jeśli $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$, to $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} f$ jest absolutnie ciągła. W **[P12]** zajmujemy się pytaniem:

Dla jakich funkcji $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ otrzymujemy, że $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}} f$ jest absolutnie ciągła?

Biorąc np. funkcję Heaviside'a $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$ zauważamy, że jeśli $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$, to $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}} f$. Jeśli z kolei $f \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ jest absolutnie ciągła, to $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}} f$ również, zob. [44, Theorem 1.3]. Stąd $\mathrm{BV}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{AC}(\mathbb{R})$ to naturalna klasa do zbadania, a ważnym przykładem jest funkcja Cantora h. Dzięki strukturze zbioru Cantora mamy $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}} h \in \mathrm{AC}(\mathbb{R})$, przy czym kluczowe jest pokazanie, że $E_h := \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}} h(x) = h(x)\}$ spełnia $|h(E_h)| = 0$. Rysunek 2 pokazuje, że średnie wartości h na $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 1)$, $(\frac{1}{3}, 1)$ to odpowiednio $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$. Ponieważ h i $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}} h$ są rosnące, z $h(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$ i $Mh(\frac{2}{3}) \geq \frac{5}{8}$ otrzymujemy, że $h(E_h) \cap (\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) = \emptyset$.



RYSUNEK 2. Funkcja Cantora h i jej średnie na $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 1)$, $(\frac{1}{3}, 1)$.

To samo podejście działa dla funkcji związanych z miarami d-Ahlforsa. Dla zbioru domkniętego $A \in [0,1]$ i dodatniej miary borelowskiej η na $\mathbb{R}$ mówimy, że A jest typu d-Ahlforsa względem η, jeśli $\eta(\mathbb{R} \setminus A) = 0$ i istnieje $C \in (1, \infty)$, taka że dla każdego $x \in A$ i każdego $r \in (0,1)$ mamy

$$C^{-1} r^d \leq \eta([x - r, x + r]) \leq C r^d.$$

Mówimy też, że η jest miarą d-Ahlforsa związaną z A. Przykładowo miara Hausdorffa na trójkowym zbiorze Cantora jest miarą d-Ahlforsa dla $d = \log 2 / \log 3$. Główny wynik z **[P12]** wygląda następująco.

Twierdzenie 4.22. *Dla $m \in \mathbb{Z}_+$ określmy $g(x) := \sum_{i=1}^{m} \mu_i([0,x])$, gdzie $(\mu_i)_{i=1}^{m}$ to ciąg miar d_i-Ahlforsa, $d_i \in (0,1)$, związanych z domkniętymi zbiorami $E_i \subseteq [0,1]$. Wówczas $\mathcal{M}^{\mathrm{c}}_{\mathbb{R}} g$ jest absolutnie ciągła.*

4.3.18. ***Polynomial ergodic theorems in the spirit of Dunford and Zygmund (praca* [S1]*)***. W tym artykule badamy operatory maksymalne w teorii ergodycznej, zob. rozdział 4.3.5.

W 1951 r. Dunford [27] i Zygmunt [71] niezależnie uogólnili twierdzenie ergodyczne Birkhoffa [9] na przypadek wieloparametrowy z wieloma przekształceniami zachowującymi miarę. Niech $\mathcal{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, \mathcal{T})$, gdzie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest σ-skończoną przestrzenią miarową , zaś $\mathcal{T}$ jest rodziną $K \in \mathbb{Z}_+$ zachowujących miarę niekoniecznie komutujących *potoków* $(T_k^t)_{t \in \mathbb{R}}$, czyli $T_k^t \colon X \to X$ zachowują miarę oraz $T_k^t T_k^{t'} = T_k^{t+t'}$ dla $t, t' \in \mathbb{R}$ i $T_k^0 = \mathrm{id}$. Niech $X \times \mathbb{R}^K \ni (x, t_1, \ldots, t_K) \mapsto T_1^{t_1} \cdots T_K^{t_K} x \in X$ będzie funkcją mierzalną. Wówczas dla $p \in (1, \infty)$ i $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ następująca granica istnieje μ-prawie wszędzie

$$\lim_{\min\{M_1, \ldots, M_K\} \to \infty} \frac{1}{M_1 \cdots M_K} \int_{[0,M_1] \times \cdots \times [0,M_K]} f(T_1^{t_1} \cdots T_K^{t_K} x) \, \mathrm{d}(t_1, \ldots, t_K). \tag{4.15}$$

W **[S1]** dostajemy wielomianowe rozszerzenie tego wyniku. Dla $n \in \mathbb{Z}_+$ niech $\mathbb{R}[\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n]$ będzie przestrzenią wielomianów n-zmiennych $P(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$ o współczynnikach rzeczywistych i n niewiadomych. Każdy taki wielomian identyfikujemy z funkcją $\mathbb{R}^n \ni (t_1, \ldots, t_n) \mapsto P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}$. Jeśli $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_K\} \subseteq \mathbb{R}[\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n]$, to $\deg \mathcal{P} := \max\{\deg P_k : k \in [K]\}$, gdzie $\deg P_k$ to stopień P_k.

Załóżmy, że $\mathcal{T}$ składa się z przekształceń komutujących i spełniony jest warunek mierzalności. Dla funkcji lokalnie całkowalnej $f\colon X \to \mathbb{R}$ i $\vec{M} = (M_1, \ldots, M_n) \in \mathbb{R}_+^n$ określamy

$$\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}} f(x) := \frac{1}{M_1 \cdots M_n} \int_{[0,M_1]\times\cdots\times[0,M_n]} f(T_1^{P_1(\vec{t})} \cdots T_K^{P_K(\vec{t})} x)\, \mathrm{d}\vec{t}, \qquad x \in X. \tag{4.16}$$

Wówczas (4.16) jest wersją ciągłą (4.7) z $L = 1$ dla n-wymiarowych prostokątów zamiast kostek.

Teraz wprowadzimy pewne ciągłe n-wymiarowe uogólnienie $\mathcal{O}$ z rozdziału 4.3.5, które mierzy zachowanie rodzin liczb $(a_j)_{j\in\mathbb{R}_+^n}$. Dla $j, j' \in \mathbb{R}_+^n$ piszemy $j \prec j'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j_i < j_i'$ dla wszystkich $i \in [n]$. Dla parametru $S \in \mathbb{Z}_+$ definiujemy

$$\mathfrak{S}_S := \{(I_s)_{s\in[S+1]} \subseteq \mathbb{R}_+^n : I_1 \prec \cdots \prec I_{S+1}\}$$

oraz, gdy $\mathcal{I} \in \mathfrak{S}_S$ i $\rho \in [1, \infty)$, definiujemy powiązaną półnormę q-oscylacyjną wzorem

$$\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^{\rho}((a_j)_{j\in\mathbb{R}_+^n}) := \Big(\sum_{s\in[S]} \sup_{I_s \prec j \prec I_{s+1}} |a_j - a_{I_s}|^{\rho} \Big)^{1/\rho}.$$

Główny wynik **[S1]** wygląda następująco.

Twierdzenie 4.23. *Dla $\mathcal{X}$ i $\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}}$ jak wyżej jeśli $p \in [1, \infty]$ i $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X})$, to mamy poniższe stwierdzenia.*

(i) *Jeśli $p \in (1, \infty)$, to funkcje $\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}} f$ zbiegają w $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$ dla* $\min\{M_1, \ldots, M_k\} \to \infty$.

(ii) *Jeśli $p \in (1, \infty)$, to wartości $\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}} f(x)$ zbiegają dla* $\min\{M_1, \ldots, M_k\} \to \infty$ *oraz dla μ-prawie wszystkich $x \in X$.*

(iii) *Jeśli $p \in (1, \infty]$, to zachodzi następująca nierówność maksymalna*

$$\Big\| \sup_{\vec{M}\in\mathbb{R}_+^K} |\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}} f| \Big\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{X})} \le C(p, \deg\mathcal{P}) \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{X})}.$$

(iv) *Jeśli $p \in (1, \infty)$, to zachodzi następująca nierówność oscylacyjna*

$$\sup_{S\in\mathbb{Z}_+} \sup_{\mathcal{I}\in\mathfrak{S}_S} \big\| \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^2(\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}} f : \vec{M} \in \mathbb{R}_+^n) \big\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{X})} \le C(p, \deg\mathcal{P}) \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{X})},$$

gdzie $\mathcal{O}_{\mathcal{I}}^2(\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}} f : \vec{M} \in \mathbb{R}_+^n)$ oznacza funkcję $x \mapsto \mathcal{O}_{\mathcal{I}}^2(\mathcal{A}_{\vec{M}}^{\mathcal{T},\mathcal{P}} f(x) : \vec{M} \in \mathbb{R}_+^n)$.

Stała $C(p, \deg\mathcal{P})$ zależy od $\deg\mathcal{P}$*, ale nie zależy od współczynników wielomianów P_k.*

Punkty (i)–(iii) są wnioskami z nierówności oscylacyjnej (iv), ponieważ pracujemy z operatorami średniującymi, które są jednostajnie ograniczone na $\mathcal{L}^p(\mathcal{X})$. Ta sama strategia była użyta w [43] w celu pokazania punktowej zbieżności pewnych dwuliniowych średnich ergodycznych z tą różnicą, że zamiast półnormy q-oscylacyjnej autorzy wykorzystali podobny obiekt, jakim jest półnorma wariacyjna.

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej

W trakcie mojej kariery byłem zatrudniony w **2** instytucjach naukowych:

- Politechnika Wrocławska (od 2019),
- Basque Center for Applied Mathematics (2021–2023).

Ponadto odbyłem **5** wizyt zagranicznych (Baylor University, Institute for Advanced Study, Rutgers University) oraz regularnie uczestniczę w konferencjach o charakterze międzynarodowym. Obecnie współpracuję z matematykami z ponad **5** różnych krajów.

Głównym efektem mojej aktywności naukowej jest osiągnięcie opisane w rozdziałach 4.3.6–4.3.10. Dodatkową wartość mają pozostałe prace opisane w rozdziałach 4.3.12–4.3.18. Warto podkreślić, że aktywność w różnych jednostkach znajduje odzwierciedlenie w spektrum podejmowanych tematów badawczych. Najpierw poznałem klasyczną teorię operatorów maksymalnych na Politechnice Wrocławskiej, co zaowocowało artykułami **[H1]** oraz **[H4]**. Będąc w Basque Center for Applied Mathematics skupiałem się bardziej na operatorach maksymalnych stowarzyszonych z bazami różniczkowania i tutaj pracowałem nad artykułami **[H2]** oraz **[H3]**. Inspirację do napisania artykułu **[H5]** z kontekstem ergodycznym dały mi wizyty naukowe.

6. Osiągnięcia w nauczaniu i popularyzacji nauki

Miałem przyjemność uczyć ponad tysiąc studentów, odbywając studia doktoranckie na Politechnice Wrocławskiej (2015–2019) oraz pracując tam jako asystent (2019–2020) i adiunkt (od 2020). Prowadziłem ok. **30** kursów, w tym wykłady z analizy matematycznej oraz ćwiczenia z algebry liniowej i analizy funkcjonalnej.

Byłem promotorem i mentorem **3** studentów (moja rola jest podana w nawiasie):

- Wojciech Słomian (promotor pomocniczy), rozprawa doktorska *Aspects of discrete harmonic analysis* obroniona z wyróżnieniem, 2023.
- Adrian Kit (mentor), praca magisterska *O stałych izotropowych ciał wypukłych*, 2023.
- Dawid Hanrahan (promotor), praca magisterska *Równanie ciepła na stożku* wyróżniona II nagrodą w Konkursie im. Józefa Marcinkiewicza, 2021.
- Adrian Kit (promotor), praca licencjacka *Problem igły Kakei i pokrewne zagadnienia optymalizacyjne*, 2021.
- Wojciech Słomian (mentor), praca magisterska *Transferencja oszacowań L^p pomiędzy zsymetryzowanymi rozwinięciami Jacobiego a transformatą Dunkla* wyróżniona II nagrodą w Konkursie im. Józefa Marcinkiewicza, 2019.

Poza tym wygłosiłem kilka odczytów popularnonaukowych podczas lokalnych konferencji dla studentów. Jestem też członkiem Komitetu Okręgowego Olimpiady Matematycznej dla uczniów szkół średnich.

Literatura

[1] D. Aalto, J. Kinnunen, *The discrete maximal operator in metric spaces*, J. Anal. Math. **111** (2010), 369–390.

[2] J.M. Aldaz, *The weak type $(1, 1)$ bounds for the maximal function associated to cubes grow to infinity with the dimension*, Ann. of Math. **173** (2011), 1013–1023.

[3] J.M. Aldaz, J. Pérez Lázaro, *Functions of bounded variation, the derivative of the one dimensional maximal function, and applications to inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 2443–2461.

[4] A. Bendikov, T. Coulhon, L. Saloff-Coste, *Ultracontractivity and embedding into L^∞*, Math. Ann. **337** (2007), 817–853.

[5] A. Bendikov, L. Saloff-Coste, *Spaces of smooth functions and distributions on infinite-dimensional compact groups*, J. Funct. Anal. **218** (2005), 168–218.

[6] C. Bennett, R.A. DeVore, R. Sharpley, *Weak-L^∞ and BMO*, Ann. of Math. **113** (1981), 601–611.

[7] C. Berg, *Potential theory on the infinite dimensional torus*, Invent. Math. **32** (2006), 49–100.

[8] V. Bergelson, A. Leibman, *A nilpotent Roth theorem*, Invent. Math. **147** (2002), 427–470.

[9] G. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **17** (1931), 656–660.

[10] J. Bober, E. Carneiro, K. Hughes, L.B. Pierce, *On a discrete version of Tanaka's theorem for maximal functions*, Proc. Am. Math. Soc. **140** (2012), 1669–1680.

[11] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467–1476.

[12] J. Bourgain, *On L^p bounds for maximal functions associated to convex bodies in $\mathbb{R}^n$*, Israel J. Math. **54** (1986), 257–265.

[13] J. Bourgain, *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers*, Israel J. Math. **61** (1988), 39–72.

[14] J. Bourgain, *On the pointwise ergodic theorem on L^p for arithmetic sets*, Israel J. Math. **61** (1988), 73–84.

[15] J. Bourgain, *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets. With an appendix by the author, H. Furstenberg, Y. Katznelson, and D.S. Ornstein*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **69** (1989), 5–45.

[16] J. Bourgain, *On the Hardy-Littlewood maximal function for the cube*, Israel J. Math. **203** (2014), 275–293.

[17] J. Bourgain, M. Mirek, E.M. Stein, B. Wróbel, *Dimension-free estimates for discrete Hardy–Littlewood averaging operators over the cubes in $\mathbb{Z}^d$*, Amer. J. Math. **141** (2019), 857–905.

[18] J. Bourgain, M. Mirek, E.M. Stein, B. Wróbel, *On discrete Hardy–Littlewood maximal functions over the balls in $\mathbb{Z}^d$: dimension-free estimates*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics 2256 (2020), 127–169.

[19] J. Bourgain, M. Mirek, E.M. Stein, B. Wróbel, *On the Hardy–Littlewood maximal functions in high dimensions: Continuous and discrete perspective*, Geometric Aspects of Harmonic Analysis, Springer INdAM Series 45 (2021), 107–148.

[20] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486–490.

[21] A. Calderón, *Ergodic theory and translation invariant operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **59** (1968), 349–353.

[22] A. Carbery, *An almost-orthogonality principle with applications to maximal functions associated to convex bodies*, Bull. Amer. Math. Soc. **14** (1986), 269–274.

[23] E. Carneiro, J. Madrid, L.B. Pierce, *Endpoint Sobolev and BV continuity for maximal operators*, J. Funct. Anal. **273** (2017), 3262–3294.

[24] R.R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[25] A. Córdoba, R. Fefferman, *A geometric proof of the strong maximal theorem*, Ann. of Math. **102** (1975), 95–100.

[26] E.B. Davies, N. Mandouvalos, *Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **57** (1988), 182–208.

[27] N. Dunford, *An individual ergodic theorem for non-commutative transformations*, Acta Sci. Math. Szeged **14** (1951), 1–4.

[28] C.F. Dunkl, Y. Xu, *Orthogonal Polynomials of Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
[29] J. Duoandikoetxea, F. Martín-Reyes, S. Ombrosi, *On the A_∞ conditions for general bases*, Math. Z. **282** (2016), 955–972.
[30] E. Fernández, *Análisis de Fourier en el toro infinito-dimensional*, Ph.D. thesis, Universidad de La Rioja, 2019.
[31] E. Fernández, L. Roncal, *A decomposition of Calderón–Zygmund type and some observations on differentiation of integrals on the infinite-dimensional torus*, Potential Anal. **53** (2020), 1449–1465.
[32] A. Fiorenza, M. Krbec, *On the domain and range of the maximal operator*, Nagoya Math. J. **158** (2000), 43–61.
[33] L. Grafakos, S. Montgomery-Smith, *Best constants for uncentered maximal functions*, Bull. Lond. Math. Soc. **29** (1997), 60–64.
[34] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81–116.
[35] A.S. Iakovlev, J.O. Strömberg, *Lower bounds for the weak type $(1,1)$ estimate for the maximal function associated to cubes in high dimensions*, Math. Res. Lett. **20** (2013), 907–918.
[36] B. Jessen, *A remark on strong differentiation in a space of an infinite number of dimensions*, Mat. Tidsskr. B (1950), 54–57.
[37] B. Jessen, *On strong differentiation*, Mat. Tidsskr. B (1952), 90–91.
[38] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math. **25** (1935), 217–234.
[39] F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.
[40] R.L. Jones, A. Seeger, J. Wright, *Strong variational and jump inequalities in harmonic analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 6711–6742.
[41] J. Kinnunen, *The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function*, Israel J. Math. **100** (1997), 117–124.
[42] J. Kinnunen, P. Lindquist, *The derivative of the maximal function*, J. Reine Angev. Math. **503** (1998), 161–167.
[43] B. Krause, M. Mirek, T. Tao, *Pointwise ergodic theorems for non-conventional bilinear polynomial averages*, Ann. of Math. **195** (2022), 997–1109.
[44] O. Kurka, *On the variation of the Hardy-Littlewood maximal function*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **40** (2015), 109–133.
[45] H. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **27** (1910), 361–450.
[46] H.-Q. Li, *La fonction maximale de Hardy–Littlewood sur une classe d'espaces métriques mesurables*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), 31–34.
[47] H.-Q. Li, *La fonction maximale non centrée sur les variétés de type cuspidale*, J. Funct. Anal. **229** (2005), 155–183.
[48] H.-Q. Li, *Les fonctions maximales de Hardy–Littlewood pour des mesures sur les variétés cuspidales*, J. Math. Pures Appl. **88** (2007), 261–275.
[49] D. Lind, *Ergodic automorphisms of the infinite torus are Bernoulli*, Israel J. Math. **17** (1974), 162–168.
[50] H. Luiro, *Continuity of the maximal operator in Sobolev spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 243–251.
[51] J. Madrid, *Endpoint Sobolev and BV continuity for maximal operators, II*, Rev. Mat. Iberoam. **35** (2019), 2151–2168.
[52] J. Małecki, G. Serafin, *Dirichlet heat kernel for the laplacian in a ball*, Potential Anal. **52** (2020), 545–563.
[53] J. Mateu, P. Mattila, A. Nicolau, J. Orobitg, *BMO for nondoubling measures*, Duke Math. J. **102** (2000), 533–565.
[54] A.D. Melas, *The best constant for the centered Hardy–Littlewood maximal inequality*, Ann. of Math. **157** (2003), 647–688.
[55] D. Müller, *A geometric bound for maximal functions associated to convex bodies*, Pacific J. Math. **142** (1990), 297–312.
[56] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderón–Zygmund operators on nonhomogeneous spaces*, Int. Math. Res. Not. IMRN **9** (1998), 463–487.
[57] J. von Neumann, *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **18** (1932), 70–82.
[58] A. Nowak, P. Sjögren, T.Z. Szarek, *Sharp estimates of the spherical heat kernel*. J. Math. Pures Appl. **129** (2018), 23–33.
[59] A. Nowak, P. Sjögren, T.Z. Szarek, *Genuinely sharp heat kernel estimates on compact rank-one symmetric spaces, for Jacobi expansions, on a ball and on a simplex*, Math. Ann. **381** (2021), 1455–1476.
[60] J.P.G. Ramos, O. Saari, J. Weigt, *Weak differentiability for fractional maximal functions of general L^p functions on domains*, Adv. in Math. **368** (2020), 107144.
[61] J.L. Rubio de Francia, *Convergencia de series de Fourier de infinitas variables*, Publ. Sec. Mat. Univ. Autónoma Barcelona **21** (1980), 237–241.
[62] Y. Sawano, *Sharp estimates of the modified Hardy–Littlewood maximal operator on the nonhomogeneous space via covering lemmas*, Hokkaido Math. J. **34** (2005), 435–458.
[63] P. Sjögren, *A remark on the maximal function for measures in $\mathbb{R}^n$*, Amer. J. Math. **105** (1983), 1231–1233.
[64] E.M. Stein, *The development of square functions in the work of A. Zygmund*. Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 359–376.
[65] K. Stempak, *Modified Hardy–Littlewood maximal operators on nondoubling metric measure spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **40** (2015), 443–448.
[66] K. Stempak, *Examples of metric measure spaces related to modified Hardy–Littlewood maximal operators*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **41** (2016), 313–314.
[67] H. Tanaka, *A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function*, Bull. Austral. Math. Soc. **65** (2002), 253–258.
[68] G. Vitali, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti Accad. Sci. Torino **43** (1908), 229–246.
[69] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. **5** (1939), 1–18.
[70] Y. Xu, *Orthogonal polynomials and Fourier orthogonal series on a cone*, J. Fourier Anal. Appl. **26** (2020), 1–42.
[71] A. Zygmund, *An individual ergodic theorem for non-commutative transformations*, Acta Sci. Math. Szeged **14** (1951), 103–110.

DARIUSZ KOSZ (dariusz.kosz@pwr.edu.pl)
WYDZIAŁ MATEMATYKI, POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYBRZEŻE STANISŁAWA WYSPIAŃSKIEGO 27, 50-370 WROCŁAW