Streszczenie rozprawy doktorskiej „Procesy Lévy'ego o całkowicie monotonicznych skokach”

Jacek Mucha

Rozprawa doktorska dotyczy specjalnej klasy procesów Lévy'ego — procesów Lévy'ego o całkowicie monotonicznych skokach. Gęstość miary Lévy'ego jednowymiarowych procesów Lévy'ego o całkowicie monotonicznych skokach jest funkcją całkowicie monotoniczną. Wykładnik charakterystyczny tych procesów jest tzw. funkcją Rogersa, jeśli natomiast założymy dodatkowo symetrię ich rozkładów, to wykładnik charakterystyczny okazuje się zupełną funkcją Bernsteina. Do klasy badanych procesów należą m.in. procesy stabilne (w tym proces Wienera z dryfem) oraz klasyczny proces ryzyka.

Rozprawa składa się z dwóch części. Pierwsza część dotyczy techniki rozszerzeń harmonicznych dla zupełnych funkcji Bernsteina od operatora Laplace'a. Odpowiada na pytanie postawione w słynnym artykule Caffarellego i Silvestre'a, *An extension problem related to the fractional Laplacian*. Chodzi o badanie śladu pozostawianego przez proces stochastyczny na brzegu półpłaszczyzny. Okazuje się, że taki ślad pozostawiony przez proces Wienera jest procesem Cauchy'ego. Uogólnienie powyższej obserwacji do procesów stabilnych (dla których ślad na brzegu nie będzie już procesem Cauchy'ego) przez Mołczanowa i Ostrowskiego spopularyzowali w języku analitycznym Caffarelli i Silvestre w cytowanym wyżej artykule. W kontekście analitycznym interpretacja omawianej obserwacji przedstawia się następująco: procesowi w półpłaszczyźnie przyporządkowujemy odpowiednie zagadnienie Dirichleta, a następnie opisujemy operator, który przeprowadza warunek brzegowy Dirichleta na warunek brzegowy Neumanna — jest to tzw. operator Dirichleta–Neumanna. Pytanie Caffarellego i Silvestre'a dotyczy tego jak możliwie najszerzej można opisać klasę operatorów działających w ten sposób.

Poza częścią teoretyczną, przedstawione zostały przykłady zastosowań uogólnionej techniki Caffarellego i Silvestre'a (tzw. techniki rozszerzeń harmonicznych). Wśród tych przykładów należy wymienić uogólnienia zasady wariacyjnej i twierdzenia Couranta-Hilberta.

Druga część koncentruje się na niesymetrycznych procesach stabilnych z indeksem stabilności $\alpha \in (1, 2)$. Dla dostatecznie regularnych procesów Markowa rozkład czasu trafienia τ procesu w dopełnienie zwartego zbioru D ma rozwinięcie w bazie funkcji własnych $\{\varphi_n\}$ postaci

$$\mathbb{P}^x(\tau > t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n^-(x) \int_D \varphi_n^+(y) dy.$$

Jeśli operatory przejścia P_t nie są zwarte, to ich spektrum nie musi być dyskretne. Rozważa się wówczas tak zwane uogólnione funkcje własne. W tej części rozprawy zaprezentowane zostało rozwinięcie w bazie uogólnionych funkcji własnych dla niesymetrycznych procesów stabilnych zabitych przy pierwszym uderzeniu w $\{0\}$ oraz oparty o niej wzór dla rozkładu pierwszego czasu trafienia przez proces w $\{0\}$.

Synopsis

Lévy Processes with Completely Monotone Jumps

The thesis presents results about a special class of Lévy processes — so called Lévy processes with completely monotone jumps. The density of the Lévy measure of one-dimensional Lévy processes with completely monotone jumps is a completely monotone function. The characteristic exponent of such processes is a so called Rogers function. If we additionally assume that the process is symmetric, then the characteristic exponent is a complete Bernstein function. Stable processes (along with the Brownian motion with drift) and the classical risk process are important examples of Lévy processes with completely monotone jumps.

The thesis is divided into two main parts. The harmonic extension technique for complete Bernstein functions of the Laplace operator is the main topic of the first part. It aims to answer a question posed in the famous article of Caffarelli and Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*. The question was related to describing a trace leaved by a stochastic process on the boundary of half-plane. A well-known theorem states that the trace of a multidimensional Wiener process on the boundary of the half-plane is a Cauchy process. The result was generalised to stable processes (in this case the trace is no longer a Cauchy process) by Molchanov and Ostrovski and popularized in the analytical setting by Caffarelli and Silvestre in the cited article. In the analytical setting, the stochastic process corresponds to a Dirichlet problem. We want to describe the operator which maps the Dirichlet boundary condition into Neumann boundary condition. We call this operator a *Dirichlet-to-Neumann operator*. Caffarelli and Silvestre asked about the possible widest class of operators satisfying such conditions.

Along with the theoretical part about the generalised extension technique we provide applications. The main examples are generalisations of variational principle and a generalisation of Courant-Hilbert theorem.

The second part of the thesis focuses on non-symmetric one-dimensional stable processes with stability index $\alpha \in (1,2)$. For sufficiently regular Markov processes, the first hitting time τ of the complement of a compact set D has an eigenfunction expansion of the form

$$\mathbb{P}^x(\tau > t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n^-(x) \int_D \varphi_n^+(y) dy.$$

In the case when the transition operators P_t are not compact, the spectrum of P_t may not be discrete. In this part of the thesis a generalised eigenfunction expansion for non-symmetric one-dimensional stable processes was presented. A formula for the distribution of first hitting time of the set $\{0\}$ was also provided.