ABSTRACT OF THE DOCTORAL DISSERTATION

Title: Dynamics of countable amenable group actions

Sebastian Edward Kopacz, June 2024

This dissertation focuses on the study of the dynamics of countable amenable group actions. The entire work consists of four chapters. The first chapter contains some background, definitions and concepts appearing in this work; it also contains a brief and somewhat informal discussion of the main results of the thesis. Chapters 2, 3 and 4, which can be read separately, constitute the main part of the dissertation.

In each chapter we work with quasitilings and tilings. They allow us to use similar techniques as in $\mathbb{Z}^d$-actions. However, we need to adapt them properly to the different assumptions and goals we have set for ourselves. This leads to many complicated operations on elements of the group, for which we only know that it is amenable and countable. Accordingly, we devote a lot of attention to developing the necessary new tools, applying them later in reasoning analogous to those of $\mathbb{Z}^d$-actions. We also hope to find further applications for such tiling and quasitiling techniques.

The first work focuses on the problem of creating a factor map from a symbolic dynamical system onto a full shift. A well-known result states that any subshift of finite type (SFT) with the action of $\mathbb{Z}$ and entropy greater or equal than $\log N$ factors onto the full shift over N symbols. However, already for the $\mathbb{Z}^d$ action, where $d > 1$, the assumption of equal entropy is no longer a sufficient condition for the existence of such a factor map. In the case of entropy greater than $\log N$, some mixing condition (known as gluing) must be added in order to factor a symbolic system in $\mathbb{Z}^d$ onto full shift with N symbols. We use similar methods to adapt these constructions to symbolic dynamical systems with actions of amenable groups. We assume that X is strongly irreducible (which replaces the gluing conditions, and allows us to discuss more general subshifts than those of finite type), that it is non-periodic (it has non-periodic blocks for all possible sets of periods); furthermore, we assume that the group G has the comparison property. Under these assumptions, we create a factor map from X onto any full shift with smaller entropy (i.e. a full shift over N symbols, where $\log N < h(X)$).

In Chapter 3 we discuss the three classical results: the finite generator theorem of Krieger, the homomorphism theorem of Sinai and the Ornstein isomorphism theorem for Bernoulli shifts, classically proved by various methods. Nowadays, entropy theory has been generalized to a larger family of groups, so that the above results have been extended to actions of countably infinite amenable group. In the late 1990s, a paper by Burton, Keane and Serafin presented a new approach to the proof of all three theorems, with the methods deriving from an unpublished manuscript by Burton and Rothstein. The main idea was to translate the statements of the theorems into the language of spaces of certain measures (joinings) in product spaces, and then show that there were "many" isomorphisms (or homomorphisms) in a suitable Baire space of measures (with some particular measures

identified with isomorphisms), which turns out to be easier than constructing an isomorphism or homomorphism explicitly. Such approach allows proving all three theorems in a similar way; in such case we call them the residual theorems. All of the above was accomplished for $\mathbb{Z}$-actions; our goal is to extend this method to actions of countably infinite amenable groups. Here we follow similar lines to those of Burton, Keane and Serafin, although we spend more time on the details and the clarity of the proof. The finite generator theorem plays a key role, and its proof requires overcoming significant difficulties absent in the case of $\mathbb{Z}$-actions. In particular the development of markers and marker blocks becomes much more intricate, since marker blocks must allow us to encode a quasitiling structure leaving enough free space for other purposes.

The final chapter focuses on quasitilings and tilings. Quasitilings were introduced by Ornstein and Weiss, as a method of dividing an amenable group into so called tiles. They allow us to use similar methods as in the case of $\mathbb{Z}$-actions, where we often partition infinite sequences (corresponding to orbits) into blocks of finite lengths. Equivalently, this means that we partition $\mathbb{Z}$ into subsets of finitely many "shapes", and quasitilings/tilings aim to accomplish the same for a general group. A quasitiling does not have to partition the entire group, just "most" of it, in some well-defined sense. Tilings are "perfect" quasitilings i.e. the tiles are pairwise disjoint, and the union of the tiles covers the whole group. Each quasitiling corresponds to some symbolic point; the closed orbit of such a point is a symbolic dynamical system, so we can speak of their entropy or the set of invariant measures. Downarowicz, Huczek and Zhang proved the existence of tilings of entropy zero, with shapes that have arbitrarily good invariance properties. However, it was unknown whether such tilings can be chosen to be uniquely ergodic i.e. for the associated symbolic system to only support one ergodic measure. Such a property is often useful when using (quasi)tilings to impose external "markers" onto a dynamical system. In the present work we have been able to construct a uniquely ergodic, zero entropy tiling of a countable amenable group G, whose shapes have arbitrarily good invariance properties. We achieve this by creating a sequence of tilings, for which we restrict the set of invariant measures by repeatedly replacing the possible contents of large blocks by blocks chosen from a smaller subset of the available possibilities. This forces the frequencies of blocks to be similar across the whole group, and the discrepancy to be smaller when replacing larger blocks. Hence, the system generated by the limit tiling can support only one ergodic measure.

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Tytył: Dynamika działań przeliczalnych grup ze średnią

Sebastian Edward Kopacz, Czerwiec 2024

Rozprawa doktorska skupia się na badaniu dynamiki działań przeliczalnej grupy ze średnią. Całość składa się z czterech rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera podstawowe informacje, definicje i pojęcia pojawiające się w tej pracy. Zawiera również krótką i nieco nieformalną dyskusję głównych wyników rozprawy. Rozdziały drugi, trzeci i czwarty, które można czytać oddzielnie, stanowią główną część rozprawy.

W każdym rozdziale pracujemy z kwaziparkietażami i parkietażami. Pozwalają nam one na użycie podobnych technik jak w przypadku działania jednego przekształcenia. Musimy je jednak odpowiednio dostosować do założeń i celów, które sobie postawiliśmy. Prowadzi to do wielu skomplikowanych operacji na elementach grupy, o której wiemy jedynie, że jest przeliczalna i średniowalna. W związku z tym poświęcamy wiele uwagi opracowaniu niezbędnych nowych metod i narzędzi, stosując je później w rozumowaniach analogicznych do tych dotyczących działań $\mathbb{Z}^d$. Mamy również nadzieję znaleźć dalsze zastosowania dla takich technik związanych z parkietażami i kwaziparkietażami.

Pierwsza praca koncentruje się na problemie tworzenia odwzorowania faktoryzującego z dynamicznego układu symbolicznego na pełny shift. Dobrze znany wynik mówi, że dowolny podukład skończonego typu (SFT) z działaniem liczb całkowitych i entropią większą lub równą $\log N$ faktoryzuje się na pełny shift o N symbolach. Jednak już dla działania $\mathbb{Z}^d$, gdzie $d > 1$, założenie równych entropii nie jest już wystarczającym warunkiem do istnienia takiego przekształcenia. W przypadku entropii większej niż $\log N$, należy dodać jakiś warunek mieszania (znane jako sklejanie), aby móc faktoryzować układ symboliczny w $\mathbb{Z}^d$ na pełny shift o N symbolach. Używamy podobnych metod, aby dostosować te konstrukcje do dynamicznych układów symbolicznych z działaniami grup ze średnią. Zakładamy, że X jest silnie nieredukowalny (co zastępuje warunki sklejania i pozwala nam dyskutować bardziej ogólne podukłady niż te typu skończonego), że jest nieokresowy (ma nieokresowe bloki dla wszystkich możliwych zbiorów okresów); ponadto zakładamy, że grupa G ma własność porównywania. Przy tych założeniach tworzymy odwzorowanie faktoryzujące z X na dowolny pełny shift o mniejszej entropii (tj. pełne przesunięcie z N symbolami, gdzie $\log N < h(X)$).

W trzecim rozdziale omawiamy trzy klasyczne wyniki: twierdzenie Kriegera o skończonym generatorze, twierdzenie Sinaia o homomorfizmie oraz twierdzenie Ornsteina o izomorfizmie dla układów Bernoulliego, klasycznie dowodzone różnymi metodami. Współcześnie teoria entropii rozwinęła się na większą rodzinę grup, dzięki czemu powyższe wyniki zostały rozszerzone na działania przeliczalnych grup ze średnią. Pod koniec lat dziewięćdziesiątych w pracy Burtona, Keane'a i Serafina zaprezentowano nowe podejście do dowodu wszystkich trzech twierdzeń, przy czym metody te wywodzą się z niepublikowanego manuskryptu Burtona i Rothsteina. Główną ideą było przetłumaczenie twierdzeń na język przestrzeni

pewnych miar (joiningów) w przestrzeniach iloczynowych, a następnie pokazanie, że istnieje „wiele” izomorfizmów (lub homomorfizmów) w odpowiedniej Bairowskiej przestrzeni miar (z pewnymi szczególnymi miarami utożsamianymi jako izomorfizm lub homomorfizm), co okazuje się łatwiejsze niż jawne konstruowanie izomorfizmu lub homomorfizmu. Twierdzenia zapisane w ten sposób nazywamy twierdzeniami rezydualnymi. Takie podejście pozwala na udowodnienie wszystkich trzech twierdzeń w podobny sposób. Wszystko powyższe zostało osiągnięte dla działań $\mathbb{Z}$; naszym celem jest rozszerzenie tej metody na działania przeliczalnych grup ze średnią. Podążamy tu podobnymi ścieżkami jak Burton, Keane i Serafin, choć spędzamy więcej czasu na szczegółach oraz klarowności dowodu. Twierdzenie o skończonym generatorze odgrywa kluczową rolę, a jego dowód wymaga przezwyciężenia znacznych trudności nieobecnych w przypadku działań $\mathbb{Z}$. W szczególności budowa markerów staje się znacznie bardziej skomplikowana, ponieważ bloki markerów muszą pozwolić nam zakodować strukturę kwaziparkietażową, pozostawiając wystarczająco dużo wolnego miejsca na pozostałe cele.

Ostatni rozdział skupia się na kwaziparkietażach i parkietażach. Kwaziparkietaże zostały wprowadzone przez Ornsteina i Weissa jako metoda podziału grupy ze średnią na tzw. kafelki. Pozwalają one na użycie podobnych metod jak w przypadku działań liczb całkowitych, gdzie często dzielimy nieskończone sekwencje (odpowiadające orbitom) na bloki o skończonej długości. Równoważnie oznacza to, że dzielimy $\mathbb{Z}$ na podzbiory o skończonej liczbie „kształtów”, a kwaziparkietaże mają na celu osiągnięcie tego samego dla ogólnej grupy. Kwaziparkietaż nie musi dzielić całej grupy, a jedynie jej „większość”, w pewnym dobrze zdefiniowanym sensie. Parkietaże są „idealnymi” kwaziparkietażami tzn. kafelki są parami rozłączne, a suma kafelków pokrywa całą grupę. Każdy kwaziparkietaż odpowiada pewnemu punktowi symbolicznemu; domknięta orbita takiego punktu jest dynamicznym układem symbolicznym, więc możemy mówić o jego entropii lub zbiorze miar niezmienniczych. Downarowicz, Huczek i Zhang udowodnili istnienie parkietażu o zerowej entropii, których kształty mają dowolnie dobre własności niezmiennicze. Nie było jednak wiadomo, czy jest możliwa konstrukcja parkietażu monoergodyczny, tj. aby powiązany system symboliczny posiadał tylko jedną miarę ergodyczną. Taka własność jest często przydatna, gdy używa się (kwazi)parkietażu do nakładania zewnętrznych „markerów” na układ dynamiczny. W niniejszej pracy udało nam się skonstruować monoergodyczny parkietaż o zerowej entropii dla przeliczalnej grupy ze średnią G, którego kształty mają dowolnie dobre własności niezmiennicze. Osiągnęliśmy to poprzez utworzenie ciągu parkietaży, dla których ograniczamy zbiór miar niezmienniczych poprzez wielokrotne zastępowanie możliwej zawartości dużych bloków wybranymi przez nas blokami o małej różnorodności. Wymusza to, aby częstotliwości bloków były podobne w całej grupie, a rozrzut był mniejszy przy zastępowaniu większych bloków. W związku z tym graniczny parkietaż może posiadać tylko jedną miarę ergodyczną.