# Abstract of a doctoral dissertation
# "Hardy inequalities and nonlocal geometry"
# author: Julia Anna Lenczewska


In this dissertation, we consider objects related to nonlocal operators: Hardy inequalities, capacities, heat contents, and curvatures. An important common point in these topics is that they involve applications of energy forms and semigroup theory.

Hardy inequalities are of paramount importance in harmonic analysis, functional analysis, partial differential equations, potential theory and probability. We study Hardy inequalities related to the so-called Sobolev–Bregman forms of the fractional Laplacian. We prove an optimal Hardy inequality on $L^p(\mathbb{R}^d)$ and apply it to characterize contractivity of the corresponding Feynman-Kac semigroups. Moreover, we obtain analogous inequalities for the half-space and more general convex domains, also with optimal constants.

Hardy inequalities are connected to nonlocal geometry, since they can be applied to study the nonlocal capacities of sets. The notion of capacity has its origin in Coulomb's law in electrostatics and Newton's law of universal gravitation. Capacities are defined by means of energy forms, e.g. in the classical case by the Dirichlet energy, which is connected to classical Sobolev spaces in $\mathbb{R}^d$. We investigate capacities generated by nonlocal Sobolev spaces. In particular, we prove Hardy-type inequalities to obtain Sobolev embeddings and use them to estimate the nonlocal capacities of a ball.

An important object in nonlocal geometry is the nonlocal perimeter of a set, which approximates its classical perimeter and can be applied to recover the perimeter of the original image in BMP-type image processing. We study notions closely connected to the nonlocal perimeter of a set, such as its heat content and the curvature of its boundary. We investigate the asymptotic expansion of a nonlocal heat content related to nonlocal operators as $t \to 0^+$. It was already known that the first two terms in the expansion include the volume of a set and its nonlocal perimeter and we obtain higher-order terms of the asymptotic expansion as $t \to 0^+$. Our result is new even for the fractional Laplacian. Moreover, we obtain the series expansions of semigroups belonging to a large class of unbounded zero-order Lévy operators, such as the generators of Gamma processes and geometric stable processes.

The problem of finding a set of minimal perimeter in a region gives rise to the concept of a curvature. We propose a definition of a nonlocal curvature which encompasses various variants of nonlocal curvatures that have already appeared in the literature, including the fractional curvature and the anisotropic fractional curvature. We study the limit behaviour of the introduced nonlocal curvatures under an appropriate limiting procedure. This enables us to recover known asymptotic results e.g. for the fractional curvature and obtain a new result for the anisotropic fractional curvature, where we identify the limit object as a curvature being the first variation of the related anisotropic perimeter.

# Streszczenie rozprawy doktorskiej
# pt. „Nierówności Hardy'ego i geometria nielokalna"
# autor rozprawy: Julia Anna Lenczewska

W niniejszej rozprawie rozważamy obiekty związane z operatorami nielokalnymi: nierówności Hardy'ego, pojemności, zawartości ciepła i krzywizny. Ważnym wspólnym punktem tych tematów jest to, że obejmują one zastosowania form energii i teorii półgrup.

Nierówności Hardy'ego mają ogromne znaczenie w analizie harmonicznej, analizie funkcjonalnej, równaniach różniczkowych cząstkowych, teorii potencjału i prawdopodobieństwie. Badamy nierówności Hardy'ego związane z tak zwanymi formami Sobolewa-Bregmana dla ułamkowego laplasjanu. Dowodzimy optymalnej nierówności Hardy'ego na $L^p(\mathbb{R}^d)$ i stosujemy ją do charakteryzacji kontraktywości odpowiednich półgrup Feynmana-Kaca. Ponadto otrzymujemy analogiczne nierówności dla półprzestrzeni i bardziej ogólnych obszarów wypukłych, również z optymalnymi stałymi.

Nierówności Hardy'ego są powiązane z geometrią nielokalną, ponieważ można je zastosować do badania nielokalnych pojemności zbiorów. Pojęcie pojemności ma swoje źródło w prawie Coulomba w elektrostatyce i prawie powszechnego ciążenia Newtona. Pojemności są definiowane za pomocą form energii, np. w klasycznym przypadku za pomocą energii Dirichleta, która jest związana z klasycznymi przestrzeniami Sobolewa w $\mathbb{R}^d$. Badamy pojemności generowane przez nielokalne przestrzenie Sobolewa. W szczególności, udowadniamy nierówności typu Hardy'ego w celu uzyskania zanurzeń Sobolewa i wykorzystujemy je do oszacowania nielokalnych pojemności kuli.

Ważnym obiektem w geometrii nielokalnej jest nielokalny obwód zbioru, który przybliża jego klasyczny obwód i może być zastosowany do odzyskania obwodu oryginalnego obrazu w przetwarzaniu map bitowych. Badamy pojęcia ściśle związane z nielokalnym obwodem zbioru, takie jak jego zawartość ciepła i krzywizna jego brzegu. Badamy rozwinięcie asymptotyczne nielokalnej zawartości ciepła związanej z operatorami nielokalnymi gdy $t \to 0^+$. Wiadomo już było, że pierwsze dwa wyrazy w rozwinięciu obejmują objętość zbioru i jego nielokalny obwód, a my otrzymujemy wyrazy wyższego rzędu rozwinięcia asymptotycznego gdy $t \to 0^+$. Nasz wynik jest nowy nawet dla ułamkowego laplasjanu. Ponadto otrzymujemy rozwinięcia szeregowe półgrup należących do dużej klasy nieograniczonych operatorów Lévy'ego rzędu zero, takich jak generatory procesów Gamma i geometrycznych procesów stabilnych.

Problem znalezienia zbioru o minimalnym obwodzie w danym regionie motywuje pojęcie krzywizny. Proponujemy definicję krzywizny nielokalnej, która obejmuje różne warianty krzywizn nielokalnych, które pojawiły się już w literaturze, w tym krzywiznę ułamkową i anizotropową krzywiznę ułamkową. Naszym celem jest zbadanie granicznego zachowania wprowadzonych nielokalnych krzywizn. Korzystając z naszego wyniku, odzyskujemy znaną asymptotykę m.in. krzywizny ułamkowej oraz otrzymujemy nowy wynik dla anizotropowej krzywizny ułamkowej, gdzie identyfikujemy obiekt graniczny jako krzywiznę będącą pierwszym wahaniem powiązanego anizotropowego obwodu.