

## SUMMARY OF THE DOCTORAL DISSERTATION

### *Analysis of behaviour of the dynamical functional for the fractional anomalous diffusion*

This dissertation presents the analysis of the dynamical functional as a tool for ergodicity testing, with a particular focus on the fractional Gaussian noise and the ARFIMA processes with  $\alpha$ -stable innovations. The main results are the explicit formulas for the dynamical functional and the related testing functional, the distribution of the single-trajectory estimator for the fractional Gaussian noise and the asymptotics of the dynamical functional for the ARFIMA processes. Also, the notion of  $\varepsilon$ -ergodicity is introduced, as a convenient tool for the verification of ergodic properties of real-life processes that allows for slight deviations (of size  $\varepsilon$ ) from the standard ergodicity condition expressed in terms of dynamical functional. The heuristic attempt is done to determine the minimal sample length necessary for the  $\varepsilon$ -ergodicity breaking assessment, in case of empirical data and for a given  $\varepsilon$  and process' parameters. Moreover, we analyse the influence of the measurement error of a sample and give bounds for the testing functional including this error.

In Chapter 1, the main notions are presented, including the details of the long-range dependence, the analysed fractional Gaussian noise and ARFIMA processes, the  $\alpha$ -stable distribution and the dynamical functional.

Chapter 2 contains the results on the dynamical functional. The first part of the chapter is devoted to the functional for the fractional Gaussian noise. We derive the distribution of the random variable  $\exp(iX)$  for  $X$  being Gaussian, both as a complex-valued random variable and with separated real and imaginary parts. We use it to derive the explicit formula for the dynamical functional for fractional Gaussian noise. Then, we focus on the single-trajectory estimator of the dynamical functional and analyse its distribution. We provide the main moments for general distribution and determine the detailed characteristics for the last points of a sample. In the second part of the chapter, we present the dynamical functional formula for ARFIMA processes, using two approaches: the codifference and the form of the characteristic function of  $\alpha$ -stable random variables. Next, we analyse the error in the computation of the dynamical functional for ARFIMA processes coming from the truncation of the infinite sum and discuss the asymptotics of the dynamical functional at infinity.

Chapter 3 is devoted to the ergodicity testing functional and the  $\varepsilon$ -ergodicity notion. We present the explicit formulas for the testing functional for fractional Gaussian noise and ARFIMA processes and prove their ergodicity. Next, we introduce the  $\varepsilon$ -ergodicity notion: the process is considered as  $\varepsilon$ -ergodic if starting from some point, its testing functional remains within  $\varepsilon$  neighbourhood of 0. We discuss the localisation of the point for which the testing functional enters the mentioned  $\varepsilon$ -neighbourhood of 0 (denoted  $n_0(\varepsilon)$ ), which at the same time is the minimal sample length needed to assess the  $\varepsilon$ -ergodicity for a given  $\varepsilon$ . As especially ARFIMA processes involve several parameters that can influence the convergence rate of the testing functional, we analyse the sensibility of this minimal sample length for the varying parameters of the analysed processes. Finally, we provide the bounds for the error in the dynamical and testing functionals estimation caused by the measurement error included in the empirical data.

In Chapter 4, we show the application of both dynamical and testing functionals on the single trajectories coming from two datasets: the trajectories of telomeres in living U2OS cancer cells and of the mRNA molecules inside living *E. coli* cells. We compare the estimates calculated for the analysed single trajectories with the theoretical values of the dynamical and testing functional calculated for the fitted fGn and ARFIMA processes, assess the  $\varepsilon$ -ergodicity of the sample and apply the derived error bounds.

The theoretical results presented in this dissertation are complemented with numerical-based considerations, concerning inter alia the distribution testing, the sensitivity of the minimal necessary sample length for the parameters' change and the real data analysis.

The thesis is based on four already published articles (including three written as co-author).

*Anna Łoch-Olszewska*

## STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

### *Analiza zachowania funkcjonału dynamicznego dla ułamkowych dyfuzji anomalnych*

Niniejsza rozprawa przedstawia analizę funkcjonału dynamicznego w przypadku dwóch modeli dyfuzji anomalnej: ułamkowego szumu gaussowskiego i procesów ARFIMA. Główne wyniki w niej opisane to jawne wzory na funkcjonal dynamiczny i powiązany z nim funkcjonal testowy, rozkład estymatora funkcjonału opartego na pojedynczej trajektorii dla ułamkowego szumu gaussowskiego oraz asymptotyka zachowania funkcjonału dla procesów ARFIMA. W rozprawie zdefiniowane zostało także pojęcie  $\varepsilon$ -ergodyczności – użytecznego narzędzia do testowania ergodycznych własności rzeczywistych procesów, pozwalającego na niewielkie (epsilonowe) rozbieżności w stosunku do standardowego warunku na ergodyczność procesu, wyrażonego w języku funkcjonału dynamicznego. Opisane zostały własności zachowania funkcjonału testowego pozwalające na wyznaczenie minimalnej długości trajektorii niezbędnej do stwierdzenia łamania  $\varepsilon$ -ergodyczności w przypadku danych rzeczywistych. Ponadto przeanalizowano jest wpływ błędu pomiaru oraz wyliczeń numerycznych na tę minimalną długość próbeki oraz zaproponowano oszacowania błędu w estymacji funkcjonału testowego spowodowanego wspomnianym błędem pomiaru.

W rozdziale pierwszym przytoczone są podstawowe pojęcia używane w pracy, takie jak zależności długookresowe (*long-range dependence*), ułamkowy szum gaussowski, procesy ARFIMA, rozkłady  $\alpha$ -stabilne oraz funkcjonal dynamiczny.

Rozdział drugi zawiera wyniki dotyczące funkcjonału dynamicznego. Pierwsza część rozdziału poświęcona jest ułamkowemu szumowi gaussowskiemu. Wyprowadzamy rozkład zmiennej losowej  $\exp(iX)$  dla gaussowskiej zmiennej  $X$ , zarówno jako zmiennej zespolonej, jak i jako dwóch zmiennych rzeczywistych odpowiadających części rzeczywistej i urojonej. Rozkład ten jest następnie użyty do wyprowadzenia jawnej postaci wzoru na funkcjonal dynamiczny dla ułamkowego szumu gaussowskiego. Następnie analizowany jest rozkład estymatora funkcjonału dynamicznego dla jednej trajektorii – przytaczane są wzory na momenty ogólnego rozkładu oraz szacowana postać rozkładu dla estymatora dla ostatnich punktów próbeki. W drugiej części rozdziału prezentujemy jawne wzory na funkcjonal dynamiczny dla procesów ARFIMA, używając dwóch podejść: kodyferencji oraz funkcji charakterystycznej rozkładów  $\alpha$ -stabilnych. Następnie omawiamy asymptotykę funkcjonału w nieskończoności oraz analizujemy błąd popełniany przy numerycznym wyznaczaniu jego wartości.

Rozdział trzeci poświęcony jest funkcjonałowi testowemu, służącemu do weryfikowania właściwości ergodycznych procesu, i pojęciu  $\varepsilon$ -ergodyczności. Prezentujemy jawne wzory na funkcjonal testowy dla ułamkowego szumu gaussowskiego oraz procesów ARFIMA i udowadniamy ich ergodyczność. Następnie wprowadzamy definicję  $\varepsilon$ -ergodyczności: proces jest  $\varepsilon$ -ergodyczny, jeżeli zaczynając od pewnego punktu odpowiadający mu funkcjonal testowy znajduje się w  $\varepsilon$ -otoczeniu zera. Punkt, w którym funkcjonal testowy wkracza we wspomniane otoczenie epsilonowe, oznaczony jako  $n_0$ , jest jednocześnie minimalną długością próbeki potrzebną do stwierdzenia łamania ergodyczności dla danego  $\varepsilon$ . Jako że w szczególności procesy ARFIMA zawierają wiele parametrów, mogących wpływać na tempo zbieżności funkcjonału dynamicznego, a co za tym idzie, na wartości  $n_0$ , analizujemy wrażliwość minimalnej długości trajektorii na zmieniające się parametry analizowanych procesów. Na koniec prezentujemy ograniczenia na błąd popełniany przy estymowaniu funkcjonału testowego z obserwowanego procesu obciążonego błędem pomiaru.

W rozdziale czwartym zastosowano otrzymane wyniki do dwóch pojedynczych trajektorii, pochodzących z dwóch zestawów danych: trajektorii telomerów z komórek rakowych linii U2OS i trajektorii cząsteczek mRNA w żywych bakteriach *E. coli*. Porównane zostają estymaty funkcjonału dynamicznego i funkcjonału testowego z wartościami teoretycznymi tychże funkcjonałów dla procesów dopasowanych do analizowanych trajektorii, ocenione jest łamanie  $\varepsilon$ -ergodyczności i zastosowane są wyprowadzone wcześniej ograniczenia na błąd estymacji wynikający z błędu pomiaru.

Treść rozprawy napisano na podstawie czterech opublikowanych artykułów (w tym trzech jako współautor).

*Anna Łoch-Olszewska*