STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ „PROCESY STOCHASTYCZNE NA FRAKTALACH I W OŚRODKACH LOSOWYCH”

Celem rozprawy jest konstrukcja odbijanego ruchu Browna na zwykłych fraktalach zagnieżdżonych (*simple nested fractals*) na płaszczyźnie, zbadanie własności uzyskanego procesu oraz zastosowanie go do udowodnienia istnienia całkowej gęstości stanów dla operatorów Schrödingera związanych z subordynowanymi ruchami Browna na fraktalach zaburzanymi losowymi potencjałami kratowymi (*alloy-type*). Rozprawa rozszerza dotychczasowe wyniki uzyskane dla procesów zaburzanych potencjałami poissonowskimi na trójkącie Sierpińskiego, który jest szczególnym, mało skomplikowanym przypadkiem fraktala zagnieżdżonego. Pierwszy rozdział pracy stanowi wstęp. Poniżej przedstawimy treść kolejnych rozdziałów.

W drugim rozdziale podajemy definicje podstawowych obiektów wykorzystywanych w rozprawie. Wśród specjalistów panowało przekonanie, że wierzchołki komórek fraktalnych na płaszczyźnie muszą być wierzchołkami wielokąta foremnego, co jednak nie miało formalnego dowodu w literaturze. Przeprowadzamy dowód tego faktu ze względu na jego kluczowe zastosowanie dla koncepcji dobrego etykietowania stojącej u podstaw konstrukcji procesu odbijanego. W badaniach na trójkącie Sierpińskiego posługiwano się metryką geodezyjną, która jest równoważna z metryką euklidesową. Niestety, na wielu fraktalach „najkrótsza ścieżka” łącząca dwa punkty jest krzywą o wymiarze fraktalnym większym niż 1, czyli o nieskończonej długości. Wymusza to posługiwanie się metryką grafową do mierzenia odległości. Analizujemy własności tej metryki i jej związki z metryką euklidesową.

Trzeci rozdział opisuje własność dobrego etykietowania (*good labelling property*, GLP), która umożliwia zdefiniowanie ciągłego rzutowania z nieograniczonego zbioru na pojedynczą komórkę fraktalną. Nie wszystkie fraktale posiadają tę własność. Sciśle zależy ona od geometrii zbioru. Podstawowym kontrprzykładem jest płatek śniegu Lindstrøma. Pokazujemy, że mimo to klasa fraktali z własnością dobrego etykietowania jest bardzo szeroka. Wszystkie fraktale, których liczba istotnych punktów stałych jest liczbą pierwszą lub które nie posiadają nieistotnych punktów stałych, mają GLP. Podajemy też wygodną charakteryzację fraktali z GLP wśród tych o parzystej liczbie istotnych punktów stałych.

W czwartym rozdziale przeprowadzamy konstrukcję odbijanego ruchu Browna na fraktalach posiadających GLP. Poszczególne etapy konstrukcji odbywają się analogicznie do sytuacji na trójkącie Sierpińskiego, jednak w wielu miejscach pojawiają się techniczne trudności związane z nieregularnością rozważanych zbiorów. Pokazujemy, że otrzymany proces jest symetrycznym procesem Markowa i identyfikujemy ciągłą wersją jego gęstości prawdopodobieństw przejścia, zależną w jawny sposób od gęstości procesu wolnego. Pokazujemy też, że półgrupa operatorów związana z procesem odbijanym jest fellerowska i mocno fellerowska.

Rozdział piąty zawiera oszacowania gęstości prawdopodobieństw przejścia odbijanego ruchu Browna bazujące na oszacowaniach gęstości procesu wolnego uzyskanych przez T. Kumagaiego. Wyniki te pozwalają przeanalizować zachowanie procesu dla dużych i małych czasów. Uzyskaliśmy też analogiczne wyniki dla różnicy gęstości procesu odbijanego i wolnego, co pokazuje w jaki sposób odległość od brzegu wpływa na ewolucję procesu.

W rozdziale szóstym rozważamy subordynowany ruch Browna, którego trajektorie zaburzone są przez losowy potencjał schrödingerowski pochodzący od zmiennych losowych ulokowanych w wierzchołkach kraty fraktalnej. Analizujemy związaną z nim losową półgrupę Feynmana-Kaca i losowy operator Schrödingera. Pokazujemy istnienie gęstości stanów (*integrated density of states*) dla tego operatora. Jest to miara spektralna, którą uzyskujemy jako słabą granicę miar liczących opartych na spektrach operatorów związanych z procesami odbijanymi. Tutaj również argument przebiega analogicznie jak na trójkącie Sierpińskiego, jednak bogata struktura geometryczna rozważanych zbiorów istotnie komplikuje rozumowania.

Treść rozprawy bazuje na dwóch opublikowanych artykułach autora (w tym jednym wspólnym z K. Kaletą i K. Pietruską-Pałubą) oraz na jednym nowym preprincie.

Marcin Olszewski

SUMMARY OF THE DOCTORAL DISSERTATION 'STOCHASTIC PROCESSES ON FRACTALS AND IN RANDOM MEDIA'

The purpose of the dissertation is to construct the reflected Brownian motion on planar simple nested fractals, investigate properties of the obtained process and apply it to prove the existence of the integrated density of states for Schrödinger operators associated with subordinate Brownian motions on fractals perturbed by random alloy-type potentials. The dissertation extends previous results for the processes on the Sierpiński gasket perturbed by random Poissonian potentials. The first chapter of the dissertation is the introduction. We present below the content of next chapters.

In the second chapter we give definitions of basic objects used in the dissertation. We show that vertices of a single fractal complex must be vertices of a regular polygon. This observation is crucial for our further investigations. It was first conjectured by some specialists in the field, but we found no formal proof of this fact in the literature. In case of the Sierpinski gasket the geodesic metric is Lipschitz equivalent with the Euclidean distance. Unfortunately, this is no longer true for more general simple nested fractals. It might even happen that the 'shortest path' connecting two points from the fractal is a curve of dimension higher than 1 and therefore has infinite length. The solution to this problem is based on an application of the graph metric. We analyze properties of that metric and its relations to Euclidean distance.

The third chapter describes the good labeling property (GLP), which enables to define a continuous mapping from the unbounded fractal onto single complex. Although the class of fractals having GLP is very rich, the Lindstrøm snowflake serves as a basic example showing that not every nested fractal has GLP. We prove that when the number of essential fixed points of the fractal is prime, or if all fixed points are essential, then the fractal has the GLP. Moreover, we found a nice full geometric characterization of the GLP for the sets with an even number of essential fixed points.

In chapter 4 we define the reflected diffusion on fractals having GLP. The steps of the construction are analogous to the case of Sierpiński gasket, but in some stages we must face additional technical difficulties related to the irregularities of considered sets. We show that obtained process is a symmetric Markov process and identify the continuous version of its transition probability density. We also show that the semigroup associated with the reflected process is Feller and strong Feller.

The fifth chapter contains the estimates of transition probability densities of the reflected Brownian motion. These estimates are based on the estimates of the free process given by T. Kumagai. The results allow to analyze the behavior of the process for small and large times. We also obtained analogous results for the difference between the densities of the reflected and free process, what shows how the proximity to the boundary of the set influences the evolution of the process.

In the sixth chapter we consider the subordinate Brownian motion perturbed by random alloy-type Schrödinger potential located in vertices of the fractal lattice. We analyze the associated Feynman-Kac semigroup and the random Schrödinger operator. We prove the existence of the integrated density of states for this operator. It is a spectral measure obtained as a vague limit of counting measures supported on the spectra of operators associated with the reflected processes. The reasoning follows the steps of the proof on the Sierpiński gasket, but again we must face some difficulties due to the rich geometric structure of considered sets.

The dissertation is based on two published articles (including one joint paper with K. Kaleta and K. Pietruska-Pałuba) and one unpublished preprint.

Mariusz Olszewski