Abstract of doctoral dissertation titled "Hardy's inequality associated with orthogonal expansions"

The main aim of the dissertation is to prove Hardy's inequality in the context of various orthonormal bases. During the last two decades, this problem was intensively studied by many scientists. The author's motivation was not only to explore analogously a few other systems (such as the Laguerre functions of Hermite type) or complement some known incomplete results, but also to find a unified approach to this problem. For this purpose, a rather general method was established. It works in all of the classical situations. The first chapter constitutes of the introduction. We briefly discuss content of the next ones.

In the second chapter we present the overall context and focus our attention on measure spaces $(\mathbb{X}, \mu)$, where $\mathbb{X}$ are subsets of $\mathbb{R}^d$ and μ are doubling. Then, we give some preliminaries concerning the classical notion of the Hardy space $H^1(\mathbb{R}^d)$. We recall various equivalent definitions from which we distinguish the atomic one. Afterwards, we discuss generalizations of $H^1(\mathbb{R}^d)$ for the spaces $(\mathbb{X}, \mu)$, especially the one in the sense of Coifman–Weiss. In the next part we elaborate on Hardy's inequality on $H^1(\mathbb{X}, \mu)$ associated with orthogonal expansions. The main result of this chapter is a theorem, which states that under some natural assumptions on the setting, Hardy's inequality associated with the underlying basis holds. It turns out that the admissible exponent obtained by means of this method is sharp in all of the studied frameworks.

In the next chapter we firstly study the standard Laguerre system. This can be considered as a model setting in which the computations are relatively easy. We conclude this part by constructing a counterexample which justifies that the obtained admissible exponent is sharp. Secondly, we focus our attention on Laguerre functions of Hermite type. This time verification of appropriate conditions is much more involved and requires more delicate approach. We notice that the results in this setting can be easily transferred to the generalized Hermite framework, which is done in the next section of the chapter. Finally, we consider the Laguerre functions of convolution type. This time the underlying measure is not Lebesgue measure and thus we need to proceed more carefully. We stress that the proofs of sharpness rely mostly on the precise pointwise estimates on the functions belonging to the bases.

The fourth chapter is very similar to the previous one. This time we consider four Jacobi frameworks. We point out that the oscillating nature of the polynomials and functions in these systems complicates the analysis. Firstly, we study the Jacobi trigonometric polynomial setting. It should be mentioned that in this case we allow the full range of the type parameters. We also point out that the associated measure is very similar to the one appearing in the Laguerre system of convolution type. Secondly, we focus our attention on the Jacobi trigonometric functions, for which we also prove sharp Hardy's inequality. Both of the aforementioned bases are also examined in their symmetrized forms. The results here are deduced similarly as for the generalized Hermite functions. We conclude this chapter with asymptotic estimates of the Hilb and Darboux types. These are frequently used in the proofs requiring pointwise bounds.

We devote the subsequent chapter to the L^1-analogue of Hardy's inequality. We examine in this context each of the bases studied before. For this purpose we use mainly the pointwise estimates. We point out the "multi-parity decomposition" which enables us to easily treat the symmetrized cases (and the generalized Hermite system).

Finally, in the last chapter we investigate Hardy's inequality on H^p, $p \in (0, 1]$. We restrict ourselves to the frameworks corresponding to Lebesgue measure. This is because the H^p spaces are not well defined for all $p \in (0, 1]$ if μ is arbitrary. The results presented here are the newest and therefore some auxiliary facts are often proved more generally than in the prequel. We enhance the method described in the second chapter so that it works for $p < 1$ as well. We emphasise the unified approach to sharpness. This permits us to shortly justify that the obtained admissible exponents cannot be lowered.

The content of the dissertation is based on five author's articles. Main results do not include any changes. Nonetheless, with time some methods became easier, and therefore in the thesis some arguments are shorter than in the said publications.

Paweł Plewa

Streszczenie rozprawy doktorskiej zatytułowanej „Nierówność Hardy'ego stowarzyszona z rozwinięciami ortogonalnymi"

Celem dysertacji jest udowodnienie ostrej nierówności Hardy'ego w kontekście różnych baz ortonormalnych. W ostatnich dwóch dekadach problem ten był intensywnie studiowany przez wielu naukowców. Główną motywacją autora było nie tylko zbadanie pod tym kątem kilku nowych układów (takich jak na przykład funkcje Laguerre'a typu hermitowskiego) czy uzupełnienie znanych, niepełnych wyników, ale również znalezienie zunifikowanego podejścia do tego zagadnienia. W tym celu opracowana została metoda działająca w dość ogólnej scenerii, którą można zaaplikować we wszystkich klasycznych przypadkach. Pierwszy rozdział pracy doktorskiej stanowi wstęp. Treść kolejnych pokrótce opisujemy poniżej.

W drugim rozdziale prezentujemy ogólny kontekst i skupiamy uwagę czytelnika na przestrzeniach miarowych postaci $(\mathbb{X}, \mu)$, gdzie $\mathbb{X}$ są podzbiorami $\mathbb{R}^d$, a μ są dublujące. Później wykładamy poglądowe fakty dotyczące klasycznego pojęcia przestrzeni Hardy'ego $H^1(\mathbb{R}^d)$. Przypominamy równoważne definicje, spośród których wyróżniamy atomową. W dalszej części prowadzimy dyskusję uogólnień $H^1(\mathbb{R}^d)$ do przestrzeni $(\mathbb{X}, \mu)$, w szczególności w sensie Coifmana–Weissa. Kolejny fragment poświęcamy nierówności Hardy'ego na $H^1(\mathbb{X}, \mu)$ stowarzyszonej z rozwinięciami ortogonalnymi. Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie, które mówi, że pod pewnymi naturalnymi warunkami na układ ortonormalny, zachodzi nierówność Hardy'ego stowarzyszona z rzeczoną bazą. Okazuje się, że wykładnik uzyskany w ten sposób jest ostry we wszystkich studiowanych przez nas przypadkach.

W następnym rozdziale najpierw rozważamy standardowy układ Laguerre'a, który może być traktowany jako modelowy, gdyż rachunki z nim związane są relatywnie proste. Konkludujemy tę część konstrukcją kontrprzykładu, który uzasadnia, że otrzymany dopuszczalny wykładnik jest ostry. W kolejnym fragmencie skupiamy uwagę na funkcjach Laguerre'a typu hermitowskiego. Tym razem weryfikacja odpowiednich założeń jest o wiele bardziej zawiła i wymaga delikatnego podejścia. Zauważamy, że wyniki dla tego systemu można w łatwy sposób transferować do uogólnionej bazy Hermite'a. Kończymy ten rozdział analizą funkcji Laguerre'a typu splotowego. Zaznaczamy, że skorelowana miara nie jest miarą Lebesgue'a i z tego powodu należy postępować z większą ostrożnością. Podkreślamy, że dowody ostrości zasadzają się w dużej mierze na dokładnych punktowych oszacowaniach na funkcje należące do rozpatrywanych baz.

Czwarty rozdział jest bardzo podobny do poprzedniego. Tym razem rozważamy cztery układy Jacobiego. Wskazujemy, że oscylacyjna natura wielomianów i funkcji w tych systemach komplikuje analizę. W pierwszej kolejności badamy trygonometryczne wielomiany Jacobiego. Warto zaznaczyć, że dopuszczamy tutaj pełen zakres parametrów typu. W drugiej części tego rozdziału dyskutujemy przypadek trygonometrycznych funkcji Jacobiego, dla których dowodzimy ostrej nierówności Hardy'ego. Obie rzeczone bazy są również rozważane w zsymetryzowanej formie. Wówczas rezultaty można wydedukować podobnie jak dla uogólnionych funkcji Hermite'a. Rozdział konkludujemy podając asymptotyczne oszacowania typów Hilba i Darboux. Są one wielokrotnie używane w dowodach korzystających z punktowych przybliżeń.

Kolejny rozdział poświęcamy L^1-analogonowi nierówności Hardy'ego. Badamy w tym kontekście wszystkie bazy wymienione powyżej. W tym celu korzystamy głównie z punktowych oszacowań. Warto zaznaczyć, że w przypadku zsymetryzowanych rozwinięć (oraz uogólnionych funkcji Hermite'a) korzystamy z „rozbicia wieloparzystego", które bardzo ułatwia rozumowanie.

W ostatnim rozdziale studiujemy nierówność Hardy'ego na H^p, $p \in (0, 1]$. Przestrzenie $H^p(\mathbb{X}, \mu)$ dla dowolnych miar nie są dobrze zdefiniowane dla wszystkich p, a więc ograniczamy się do układów skorelowanych z miarą Lebesgue'a. Rezultaty zaprezentowane tutaj są najnowsze i dlatego często okazują się być ogólniejsze niż te w poprzednich częściach tezy. Z naciskiem podkreślamy zunifikowane podejście do ostrości wykładników. Pozwala nam ono krótko wyjaśniać, że otrzymane parametry E są ostre.

Treść rozprawy bazuje na pięciu artykułach autora. Główne wyniki zostały zaczerpnięte stamtąd i zasadniczo nie zawierają żadnych zmian. Niemniej wraz z upływem czasu niektóre rozumowania zostały uproszczone, dlatego argumenty zawarte w pracy doktorskiej są często krótsze od ich odpowiedników zamieszczonych we wspomnianych publikacjach.

Paweł Plewa