Function spaces and the Dirichlet problem for nonlocal operators
Summary of the dissertation

Our first topic, and an important motivation, is the Dirichlet problem associated with the nonlocal Lévy operator of the form

$$Lu(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{B(0,\epsilon)^c} (u(x) - u(x+y))\, \mathrm{d}\nu(y),$$

where ν is a symmetric Lévy measure. We obtain the existence and uniqueness of the variational solutions and we establish the maximum principle which yields the supremum norm bound for the solutions.

Henceforth, we assume that ν is absolutely continuous. The variational setting strongly depends on the extension and trace problem associated with the following energy form:

$$\mathcal{E}_D[u] = \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus D^c\times D^c} (u(x) - u(y))^2 \nu(x-y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

where D is an open subset of $\mathbb{R}^d$. We solve this problem in the fourth chapter of the dissertation, in particular we give a sharp condition for the behavior of the traces $u|_{D^c}$ for functions from the Sobolev-type space which contains the functions satisfying $\mathcal{E}_D[u] < \infty$. We use the methods of the potential theory of unimodal Lévy processes and the behavior of the traces is expressed in terms of the kernel of communication via D:

$$\gamma_D(z, w) = \int_D \int_D \nu(z-x) G_D(x, y) \nu(y-w)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

where G_D is the Green function of D for the operator L and $z, w \in D^c$. Furthermore, our extension is given as the Poisson integral and in fact we obtain a Douglas-type identity, which may be understood as an energy conservation principle between a function given on D^c and its extension. In strict connection with these studies we investigate the harmonic functions of the operator L: we establish their C^2 regularity and we obtain the equivalence of numerous definitions of a harmonic function.

In the fifth chapter we shift the context to the more general Triebel–Lizorkin spaces. By using analytic methods, we determine whether the following comparability holds:

$$\int_D \left(\int_D |u(x) - u(y)|^q K(x-y)\, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x \approx \int_D \left(\int_{B(x,\theta d(x,\partial D))} |u(x) - u(y)|^q K(x-y)\, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x.$$

Here $\theta \in (0, 1)$ and K is a kernel similar to a Lévy measure but adapted to the above non-quadratic setting. We study the comparability and incomparability under various mixes of assumptions for the kernel K and the domain $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

The sixth chapter provides the Hardy–Stein and Douglas identities in the nonlinear setting of the Sobolev–Bregman spaces. We also establish a Douglas identity with a remainder term for sufficiently regular non-harmonic functions and we compare various types of function spaces built on the non-quadratic forms introduced in the dissertation.

Przestrzenie funkcyjne i zagadnienie Dirichleta dla operatorów nielokalnych

Streszczenie rozprawy

Pierwszym z poruszanych przez nas tematów, a także jedną z ważnych inspiracji do badań, jest zagadnienie Dirichleta związane z nielokalnym operatorem Lévy'ego o nastepującej formie:

$$Lu(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{B(0,\epsilon)^c} (u(x) - u(x+y))\,\mathrm{d}\nu(y),$$

gdzie ν jest symetryczną miarą Lévy'ego. Dostajemy istnienie i jednoznaczność rozwiązań wariacyjnych, oraz zasadę maksimum, którą wykorzystujemy do oszacowań norm supremum rozwiązań.

Poniżej zakładamy, że miara Lévy'ego ma gęstość. Teoria rozwiązań wariacyjnych jest ściśle związana z zagadnieniem rozszerzania i śladu dla poniższego funkcjonału energii:

$$\mathcal{E}_D[u] = \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus D^c \times D^c} (u(x) - u(y))^2 \nu(x-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

gdzie D jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$. Tę problematykę badamy w czwartym rozdziale, podajemy w szczególności ostry warunek na zachowanie śladów $u|_{D^c}$ funkcji z przestrzeni typu Sobolewa indukowanej przez warunek $\mathcal{E}_D[u] < \infty$. Korzystamy tutaj z metod teorii potencjału unimodalnych procesów Lévy'ego i opisujemy zachowanie śladów przy pomocy jądra komunikacji poprzez D:

$$\gamma_D(z,w) = \int_D \int_D \nu(z-x) G_D(x,y) \nu(y-w)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

gdzie G_D jest funkcją Greena zbioru D dla operatora L, oraz $z, w \in D^c$. Proponowany przez nas operator rozszerzania to całka Poissona. Dzięki takiemu podejściu otrzymujemy tożsamość Douglasa, która daje równość energii związanej z γ_D funkcji zadanej na D^c, oraz energii typu $\mathcal{E}_D$ jej rozszerzenia. Powyższe rozważania przeplatają się mocno z badaniami funkcji harmonicznych operatora L: dostajemy ich dwukrotną różniczkowalność, oraz ustalamy równoważność między wieloma definicjami harmoniczności.

W piątym rozdziale studiujemy nieco ogólniejsze przestrzenie — Triebela–Lizorkina. Korzystamy z analitycznych metod w celu odpowiedzi na pytanie, kiedy zachodzi poniższa porównywalność:

$$\int_D \left(\int_D |u(x) - u(y)|^q K(x-y)\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x \approx \int_D \left(\int_{B(x,\theta d(x,\partial D))} |u(x) - u(y)|^q K(x-y)\,\mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x,$$

gdzie $\theta \in (0,1)$ a jądro K ma dość podobną specyfikę do miary Lévy'ego, lecz jest zaadaptowane do powyższych niekwadratowych form. Porównywalność oraz jej brak ustalamy przy wielu różnych układach założeń na jądro K i obszar $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Szósty rozdział zawiera tożsamości Hardy'ego–Steina oraz Douglasa w (nieliniowym) kontekście przestrzeni Sobolewa–Bregmana. Dostajemy tam ponadto tożsamość Douglasa z resztą dla funkcji, które nie są harmoniczne, a na końcu porównujemy różne typy przestrzeni funkcyjnych stworzonych na podstawie form niekwadratowych pojawiających się w rozprawie.