ABSTRACT OF THE DOCTORAL DISSERTATION "ASPECTS OF DISCRETE HARMONIC ANALYSIS"

The purpose of the dissertation is to study L^p estimates of seminorms of the oscillation type for discrete operators of Radon type. Let $d, k \in \mathbb{N}$ be fixed and let

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_d) \colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^d$$

be a polynomial mapping, where each $\mathcal{P}_j \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ is a polynomial of k variables with integer coefficients such that $\mathcal{P}_j(0) = 0$. For any bounded function $f \colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ the discrete Radon average of f is given by

$$M_t^{\mathcal{P}} f(x) := \frac{1}{|\mathbb{B}_t|} \sum_{y \in \mathbb{B}_t} f(x - \mathcal{P}(y)),$$

where $\mathbb{B}_t := \{x \in \mathbb{Z}^k : |x| \le t\}$ for $t > 0$ (we also consider other convex sets instead of the Euclidean ball). We are also interested in the discrete singular Radon transform defined as

$$H_t^{\mathcal{P}} f(x) := \sum_{y \in \mathbb{B}_t \setminus \{0\}} f(x - \mathcal{P}(y)) K(y),$$

where $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ is a Calderón–Zygmund kernel which satisfies appropriate regularity conditions.

At the end of 1980s Bourgain, in his groundbreaking series of papers on the convergence of ergodic averages along polynomial orbits, introduced a whole set of new tools for studying pointwise convergence. One of them is the oscillation seminorm. For an increasing sequence $I = (I_j : j \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}_+$ and $N \in \mathbb{N}$ we define the *oscillation seminorm* of a function $f \colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ as

$$O^2_{I,N}(f(t) : t > 0) := \Big(\sum_{j=1}^{N} \sup_{\substack{I_j \le t < I_{j+1} \\ t > 0}} |f(t) - f(I_j)|^2 \Big)^{1/2}.$$

In the dissertation, we focus on uniform L^p estimates for the oscillation seminorm $O^2_{I,N}$ for the Radon operators $M_t^{\mathcal{P}}$ and $H_t^{\mathcal{P}}$. In the first chapter, we provide a historical overview and we formulate the main results of the thesis.

In the second chapter, we present some basic tools and properties that we will use in the rest of the dissertation. We also present the proof of Calderón transference principle which makes our results applicable to ergodic theory.

The third chapter is devoted to proving the uniform oscillation inequality of the form

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{I \subset \mathbb{R}_+} \big\| O^2_{I,N}(N_t f : t > 0) \big\|_{L^p(X)} \lesssim_{p,d,k,\deg \mathcal{P}} \|f\|_{L^p(X)}, \quad f \in L^p(X),$$

where N_t is either $M_t^{\mathcal{P}}$ or $H_t^{\mathcal{P}}$. For this purpose, we use the methods developed by Bourgain, Ionescu–Wainger, and by Mirek, Stein, Trojan and Zorin-Kranich, which were used in the context of jump inequalities.

In the fourth chapter, we develop the so-called bootstrap approach to studying L^p estimates for various types of seminorms, including the oscillation seminorm $O^2_{I,N}$, for discrete Radon type operators. Roughly speaking, the bootstrap method of proving some inequality consists of estimating the left hand side of the inequality, say L, by the expression of the form $C \cdot L^\theta$ with $\theta \in [0, 1)$ and $C > 0$ being independent of L. This leads to the following relation

$$L \le C L^\theta. \tag{1}$$

Dividing both sides by L^θ we get $L^{1-\theta} \le C$ and since $\theta \in [0, 1)$ this gives us

$$L \le C^{\frac{1}{1-\theta}}$$

which provide us with a nontrivial bound for L. The name *bootstrap* for this procedure refers to operating only with the quantity L which is given at the beginning. In 2018, Mirek, Stein and Zorin-Kranich developed a bootstrap approach in the context of jump inequalities for continuous Radon type operators. In [D3] we succeeded in developing an analogous approach in the case of discrete Radon type operators.

All new results presented in chapters three and four can be found in the articles:

[D1]: Mirek, M., Słomian, W., Szarek, T.Z. Some remarks on oscillation inequalities. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1–30 (2022), doi:10.1017/etds.2022.77,

[D2]: Słomian, W. Oscillation Estimates for Truncated Singular Radon Operators. *J. Fourier Anal. Appl.* **29**, 4 (2023),

[D3]: Słomian, W. Bootstrap methods in bounding discrete Radon operators. *J. Funct. Anal.* **283**, 9 (2022).

The results and methods described in the dissertation are largely based on the papers mentioned above. In most cases, the content of the dissertation has been expanded to include additional details that were not presented in the published versions.

Wojciech Słomian

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ
„ASPEKTY DYSKRETNEJ ANALIZY HARMONICZNEJ"

Celem niniejszej rozprawy jest badanie oszacowań typu L^p dla półnorm typu oscylacyjnego dla dyskretnych operatorów typu Radona. Niech $d, k \in \mathbb{N}$ będą ustalone oraz niech

$$\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_d) \colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^d$$

będzie przekształceniem wielomianowym, gdzie dla każdego $j \in \{1, \ldots, d\}$ funkcja $\mathcal{P}_j \colon \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że $\mathcal{P}_j(0) = 0$. Dla funkcji $f \colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ o skończonym nośniku definiujemy średnią typu Radona funkcji f jako

$$M_t^{\mathcal{P}} f(x) := \frac{1}{|\mathbb{B}_t|} \sum_{y \in \mathbb{B}_t} f(x - \mathcal{P}(y)),$$

gdzie $\mathbb{B}_t := \{x \in \mathbb{Z}^k : |x| \leq t\}$ dla $t > 0$ (w miejsce kuli rozpatrujemy również inne zbiory wypukłe). Interesuje nas także singularana transformata Radona zdefiniowana jako

$$H_t^{\mathcal{P}} f(x) := \sum_{y \in \mathbb{B}_t \setminus \{0\}} f(x - \mathcal{P}(y)) K(y),$$

gdzie $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ jest jądrem Calderóna–Zygmunda spełniającym odpowiednie warunki skracań i regularności.

Pod koniec lat 80. ubiegłego wieku Bourgain w swojej przełomowej serii prac o zbieżności średnich ergodycznych wprowadził cały zestaw nowych narzędzi niezbędnych do badania zbieżności punktowej prawie wszędzie. Jednym z nich jest półnorma oscylacyjna. Niech $I = (I_j : j \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}_+$ będzie dowolnym ściśle rosnącym ciągiem o wartościach dodatnich. Dla funkcji $f \colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ oraz $N \in \mathbb{N}$ określamy *półnormę oscylacyjną* jako

$$O_{I,N}^2(f(t) : t > 0) := \Big(\sum_{j=1}^{N} \sup_{\substack{I_j \leq t < I_{j+1} \\ t > 0}} |f(t) - f(I_j)|^2 \Big)^{1/2}.$$

W rozprawie skupiamy się na jednostajnych oszacowaniach typu L^p dla półnormy $O_{I,N}^2$ dla operatorów Radona $M_t^{\mathcal{P}}$ oraz $H_t^{\mathcal{P}}$.

Pierwszy rozdział pracy stanowi wstęp. Przedstawiamy w nim zarys historyczny oraz formułujemy główne wyniki pracy.

W rozdziale drugim przedstawiamy podstawowe narzędzia i własności, z których będziemy korzystali w pozostałej części pracy. Prezentujemy w nim również dowód zasady transfererecji Calderóna, dzięki której nasze wyniki mają zastosowanie w teorii ergodycznej.

Rozdział trzeci jest poświęcony udowodnieniu jednostajnej nierówności oscylacyjnej postaci

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{I \subset \mathbb{R}_+} \big\| O_{I,N}^2(N_t f : t > 0) \big\|_{L^p(X)} \lesssim_{p,d,k,\deg \mathcal{P}} \|f\|_{L^p(X)}, \quad f \in L^p(X),$$

gdzie N_t jest jednym z operatorów $M_t^{\mathcal{P}}$ oraz $H_t^{\mathcal{P}}$. W tym celu korzystamy z metod opracowanych przez Bourgaina, Ionescu–Waingera oraz przez Mirka, Steina, Trojana i Zorin-Kranicha, które zostały użyte w kontekście oszacowań wariacyjnych i skokowych.

W czwartym rozdziale zajmujemy się tzw. bootstrapowym podejściem do badania oszacowań ℓ^p dla różnego rodzaju półnorm, w tym półnormy oscylacyjnej $O_{I,N}^2$, dla dyskretnych operatorów typu Radona. Metoda bootstrapowa dowodzenia zadanej nierówności polega na oszacowaniu lewej strony nierówności, nazywanej umownie L, poprzez wyrażenie postaci CL^θ dla $\theta \in [0, 1)$, przy czym $C > 0$ jest niezależne od L. Prowadzi to do następującej zależności

$$L \leq CL^\theta.$$

Dzieląc obie strony przez L^θ otrzymujemy $L^{1-\theta} \leq C$, a ponieważ $\theta \in [0,1)$, to otrzymujemy

$$L \leq C^{\frac{1}{1-\theta}}$$

co daje nietrywialne oszacowanie wielkości L. Określenie „bootstrap" dla tej procedury odnosi się do operowania tylko wielkością L, która jest podana na początku. W 2018 roku Mirek, Stein i Zorin-Kranich rozwinęli podejście bootstrapowe w celu otrzymania oszacowań typu L^p dla półnormy wariacyjnej i skokowej dla ciągłych operatorów typu Radona. W pracy [D3] udało się rozwinąć analogiczne podejście w przypadku dyskretnych operatorów typu Radona.

Wszystkie nowe wyniki przedstawione w rozdziałach trzecim i czwartym można znaleźć w artykułach:

[**D1**]: Mirek, M., Słomian, W., Szarek, T.Z. Some remarks on oscillation inequalities. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1–30 (2022), doi:10.1017/etds.2022.77,

[**D2**]: Słomian, W. Oscillation Estimates for Truncated Singular Radon Operators. *J. Fourier Anal. Appl.* **29**, 4 (2023),

[**D3**]: Słomian, W. Bootstrap methods in bounding discrete Radon operators. *J. Funct. Anal.* **283**, 9 (2022).

Opisane w doktoracie wyniki oraz metody w znacznej części opierają się na wyżej wymienionych pracach. W większości przypadków treść rozprawy została poszerzona o dodatkowe szczegóły, które nie były przedstawione w opublikowanych wersjach.