

Asymptotyka wartości własnych macierzy losowych i probablistyka nieprzemienne

Romuald Lenczewski

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Wykładowców Wartości Własne 2018

Funkcja zeta Riemanna

Dla $s \in \mathbb{C}$, takich że $\operatorname{Re} s > 1$, Riemann zdefiniował w 1859 roku funkcję

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

oraz pokazał, że da się ją jednoznacznie przedłużyć analitycznie do prawie całej płaszczyzny, czyli $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Własności $\zeta(s)$

Własności znane od dawna:

- 1 Dla $s = 1$ otrzymujemy rozbieżny szereg harmoniczny. Można pokazać, że $\zeta(s)$ ma w $s = 1$ biegun prosty.
- 2 Funkcja $\zeta(s)$ ma miejsca zerowe w $s = -2, -4, -6, \dots$ (są to tzw. zera trywialne).
- 3 Pozostałe zera (tzw. zera nietrywialne) znajdują się w tzw. pasie krytycznym $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$.

Hipoteza Riemanna

Wszystkie zera funkcji $\zeta(s)$ znajdują się na tzw. prostej krytycznej $\text{Re}(s) = 1/2$. Jest to słynna Hipoteza Riemanna, mająca ogromne znaczenie w matematyce. W roku 2018 Michael Atiyah przedstawił dowód Hipotezy Riemanna.

Funkcja $\zeta(s)$ a liczby pierwsze

Okazuje się, że funkcja zeta Riemanna ma magiczny związek z liczbami pierwszymi.

Przybliżenie Gaussa

Jeżeli zdefiniujemy tzw. funkcję pierwszą (*prime function*), która zlicza liczby pierwsze mniejsze lub równe x :

$$\pi(x) = \text{Card}(\{p : p \leq x\}),$$

to zachodzi przybliżony wzór

$$\pi(x) \approx \text{Li}(x) = \int_2^{\infty} \frac{dt}{\log t}$$

podany już przez Gaussa.

Wzór Riemanna

Riemann zaproponował dokładny wzór na nieco inną funkcję

$$P(x) = \sum_{p^k < x} \frac{1}{k}$$

gdzie sumujemy po potęgach liczb pierwszych, z której można wyznaczyć $\pi(x)$.

Wzór Riemanna

Przy założeniu, że Hipoteza Riemanna jest prawdziwa, wzór Riemanna można zapisać w postaci

$$P(x) = \text{li}(x) - \sum_{s:\zeta(s)=0} \text{li}(x^s) + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)} - \log 2$$

dla $x \geq 2$, gdzie

$$\text{li}(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{\log t}$$

jest całkowym logarytmem (wartość główna całki wokół 1).
Sumowanie jest po nietrywialnych zerach funkcji $\zeta(s)$.

Odkrycie Montgomery'ego i Dysona

Z kolei w roku 1973 Montgomery oraz Dyson odkryli, że jeżeli założyć, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa, to istnieje zadziwiający związek między odległościami między sąsiednimi zerami funkcji $\zeta(s)$ postaci

$$s = \frac{1}{2} + i\gamma,$$

a wartościami własnymi obiektu z zupełnie innej bajki, tzn. dużej hermitowskiej macierzy losowej z niezależnymi Gaussowskimi elementami o tym samym rozkładzie.

Odkrycie Montgomery'ego i Dysona

Montgomery pokazał, że jeżeli $T \rightarrow \infty$, to liczba par (γ, γ') dla sąsiednich zer funkcji Riemanna, takich że

$$\frac{2\pi\alpha}{\log T} < \gamma' - \gamma < \frac{2\pi\beta}{\log T},$$

jest proporcjonalna do

$$\frac{T}{2\pi} \log T \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du.$$

Dyson otrzymał podobny wzór dla rozkładu odległości między wartościami własnymi dużych Gaussowskich hermitowskich macierzy losowych.

Pojęcia

Pojawiło się tu kilka ważnych pojęć:

- 1 macierz
- 2 wartość własna
- 3 macierz losowa
- 4 macierz Gaussowska
- 5 macierz hermitowska

Macierz

Przez *macierz kwadratową* rozumiemy tabelę postaci

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

gdzie wszystkie $a_{i,j}$ są liczbami (np. zespolonymi).

Działania

Macierze przypominają liczby, ale działania na nich są bardziej skomplikowane:

- 1 dodawanie

$$A + B = (a_{i,j}) + (b_{i,j}) := (a_{i,j} + b_{i,j})$$

- 2 mnożenie

$$A \cdot B = (a_{i,j}) \cdot (b_{i,j}) = (c_{i,j}) = C$$

gdzie

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Nieprzemienność mnożenia $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iloczyn Schura

Istnieje wprowadzicie przemienny iloczyn macierzy

$$A \cdot B = C$$

gdzie

$$c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$$

ale jest mniej interesujący z punktu widzenia zastosowań.

Macierz losowa

Jeżeli elementy macierzy zastąpimy zmiennymi losowymi, to otrzymamy *macierz losową*. Przykładowo,

$$H = \begin{pmatrix} \text{die} & \text{die} & \text{die} & \dots & \text{die} \\ \text{die} & \text{die} & \text{die} & \dots & \text{die} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \text{die} & \text{die} & \text{die} & \dots & \text{die} \end{pmatrix}$$

jeżeli zmienne są określone na przestrzeni probabilistycznej dla rzutu kostką. Często zakłada się, że zmienne są niezależne.

Macierz losowa

Bardziej formalnie, to tabela postaci

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & \dots & H_{1,n} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \dots & H_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ H_{n,1} & H_{n,2} & \dots & H_{n,n} \end{pmatrix}$$

gdzie wszystkie $H_{i,j}$ są zmiennymi losowymi, często niezależnymi i o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Rodzaje macierzy losowych

Często rozważa się następujące macierze losowe:

- 1 rzeczywiste symetryczne Gaussowskie - jeżeli rozkład każdej zmiennej $H_{i,j}$ jest Gaussowski
- 2 zespolone hermitowskie Gaussowskie - jeżeli każda poza diagonalą jest postaci $H_{i,j} = X_{i,j} + iY_{i,j}$, a na diagonalu postaci $H_{j,j} = X_{j,j}$, gdzie wszystkie zmienne są Gaussowskie oraz zachodzi warunek $H_{i,j} = \overline{H_{j,i}}$ dla wszystkich i, j .

Hamiltonian układu złożonego

Macierze losowe modelują tzw. hamiltoniany układów złożonych w mechanice kwantowej, niezwyklej teorii współczesnej fizyki, w której wielkości fizyczne zastąpione są przez pewne operatory liniowe, działające na przestrzeni Hilberta.

Przestrzeń Hilberta

Typową przestrzenią Hilberta jest przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem, czyli $L^2(X)$, gdzie X jest odpowiednim zbiorem.

Najprostszy przykład to $X = \mathbb{R}$, czyli prosta rzeczywista. Stosujemy ją wtedy gdy mamy jedną cząstkę poruszającą się wzdłuż prostej.

Erwin Schrödinger

Znalazł równanie ruchu dla układu kwantowego. Do opisu mechaniki kwantowej zastosował zespoloną *funkcję falową*

$$\psi(x, t)$$

której kwadrat modułu jest całkowny i która opisuje stan układu. Co więcej, jej interpretacja, mianowicie, że

$$P_t(A) = \int_A |\psi(x, t)|^2 dx$$

wyznacza prawdopodobieństwo, że cząstka znajdzie się w zbiorze A w momencie czasu t , do dzisiaj jest uznawana za niezwykłą.

Równanie Schrödingera

Równaniem ruchu układu kwantowego jest równanie różniczkowe cząstkowe postaci

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

gdzie $\psi = \psi(x, t)$ jest zależną od czasu t funkcją falową opisującą stan układu, natomiast \hat{H} to właśnie operator zwany *Hamiltonianem*, który opisuje energię układu.

Wartości własne

W mechanice kwantowej kluczowe są *wartości własne* operatora liniowego T , czyli liczby λ takie, że

$$T\psi = \lambda\psi$$

dla *wektora własnego* $\psi \neq 0$.

Wartości własne

Działając na wektory własne, operatory zachowują się jak zwykłe liczby. Idealnie byłoby gdyby różne operatory miały takie same wektory własne, czyli

$$T\psi = \lambda\psi \quad \text{oraz} \quad S\psi = \beta\psi$$

i gdyby dało się je łatwo wyznaczyć. Ale często tak nie jest, dlatego mamy zresztą słynną zasadę nieoznaczoności Heisenberga.

Matematyczny opis mechaniki kwantowej

- 1 stan układu fizycznego = funkcja falowa $\psi \in \mathcal{H}$, wektor o normie $\|\psi\| = 1$, gdzie \mathcal{H} jest *przestrzenią Hilberta*,
- 2 wielkości fizyczne = samosprężone operatory liniowe T na \mathcal{H} ,
- 3 wyniki pomiaru wielkości fizycznej to wartości własne operatora T , a ogólniej, *widmo*.

Modelowanie układów kwantowych

Macierz losowa H pełni rolę Hamiltonianu układu złożonego, których badanie przy pomocy równania Schrödingera sprawia poważne problemy. Zamiast wartości własnych Hamiltonianu, bada się wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ macierzy losowej:

$$H\psi_k = \lambda_k\psi_k$$

oraz ich rozkład gdy $n \rightarrow \infty$.

Rozkład prawdopodobieństwa

Ponieważ złożone układy są duże, bierzemy ciąg (H_n) macierzy losowych i badamy graniczny *rozkład prawdopodobieństwa* ich wartości własnych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(H_n) = \mu$$

który mierzy, ile wartości własnych wpadnie w dany przedział liczbowy gdy wymiar macierzy jest nieskończony.

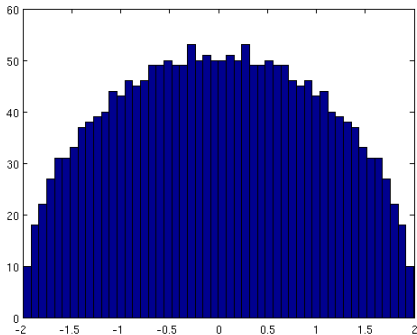
Eugene Wigner

Wyznaczył rozkład graniczny μ wartości własnych ciągu pewnej klasy symetrycznych ($H_{i,j} = H_{j,i}$) macierzy losowych gdy $n \rightarrow \infty$, tzw. *rozkład Wignera*. Znalazł ich związek z poziomami energii w fizyce jądrowej.

Rozkład Wignera

Rozkład Wignera można opisać na wiele sposobów:

- 1 probabilistyczny (gęstość prawdopodobieństwa)
- 2 operatorowy (operator na przestrzeni Hilberta)
- 3 grafowy (spacery na grafie)
- 4 liczbowy (liczby Catalana)

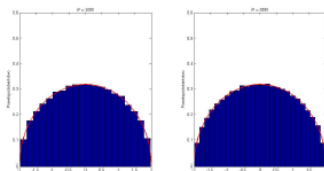


Gęstość prawdopodobieństwa

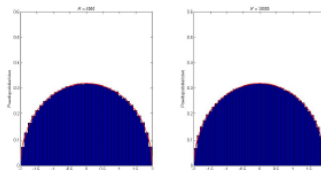
Rozkład Wignera ma gęstość

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2\pi}$$

Histogramy A. Brzezińska



Rysunek 1.8. Histogramy wartości własnych hermitowskiej macierzy Wignera z symetrycznego rozkładu Bernoulliego o wariancji 1 rozmiaru 1000×1000 (po lewej) oraz 2000×2000 (po prawej) obie uśrednione poprzez powtórzenie losowania 100 razy. Czerwona krzywa to gęstość rozkładu Wignera.



Rysunek 1.9. Histogramy wartości własnych hermitowskiej macierzy Wignera z symetrycznego rozkładu Bernoulliego o wariancji 1 rozmiaru 5000×5000 (po lewej) oraz 10000×10000 (po prawej) obie uśrednione poprzez powtórzenie losowania 100 razy. Czerwona krzywa to gęstość rozkładu Wignera.

Operator na przestrzeni Hilberta

Momenty rozkładu Wignera to momenty znanego operatora $h = S + S^*$ na $\ell^2(\mathbb{R})$:

$$m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x) = \langle h^n e_1, e_1 \rangle$$

gdzie $S(e_n) = e_{n+1}$ (operator przesunięcia w prawo),
 $S^*(e_n) = e_{n-1}$, $S^*e_1 = 0$ (operator przesunięcia w lewo), gdzie
 (e_n) - baza.

Spacerzy na grafie

Momenty rozkładu Wignera są równe

$$m_n = |W_n|$$

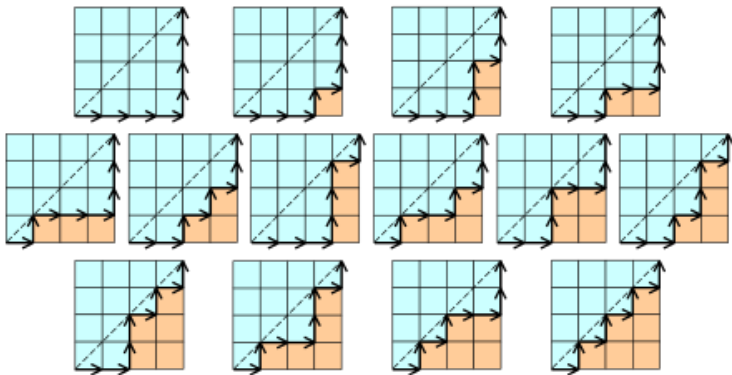
gdzie $|W_n|$ to liczba spacerów o długości n od korzenia do korzenia na półprostej (korzeniem jest koniec półprostej).

Liczby Catalana

Liczba tych spacerów równa jest liczbie Catalana $C_{n/2}$, gdy n jest parzyste, gdzie

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

($C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, i.t.d.), a zeruje się, gdy n jest nieparzyste.



Drogi Dycka

Liczby Catalana zliczają drogi Dycka (diagramy: Wikipedia).

Dan Voiculescu

Skonstruował nową probabilistykę, tzw. *probabilistykę wolną*, w której zmiennymi losowymi są nieprzemienne operatory, tzw. niezależność wolną (*freeness*), która pełni rolę nieprzemiennej wersji klasycznej niezależności zmiennych losowych.

Podstawowa idea

W klasycznej probabilistyce, jeżeli zmienne A, B są niezależne, to

$$\mathbb{E}(AB) = \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B)$$

ale ponieważ zmienne są przemienne, to także np.

$$\mathbb{E}(ABAB) = \mathbb{E}(A^2)\mathbb{E}(B^2)$$

W nieprzemiennej probabilistyce, $AB \neq BA$, więc np.

$$\mathbb{E}(ABAB) \neq \mathbb{E}(A^2)\mathbb{E}(B^2)$$

Asymptotyczna wolność

Voiculescu pokazał w roku 1991, że probabilistyka wolna opisuje zachowanie niezależnych macierzy losowych gdy $n \rightarrow \infty$.

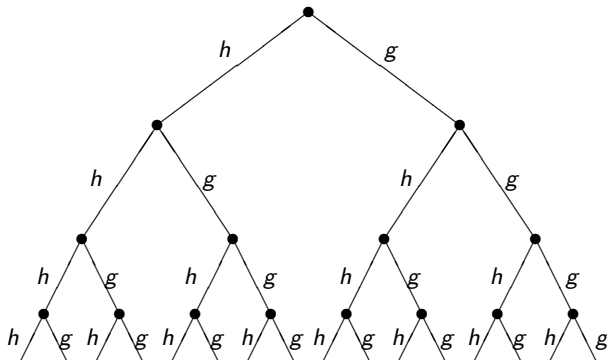
Symbolicznie, mamy zbieżność rozkładów

$$\mu(H_n + G_n) \rightarrow \mu(h) \boxplus \mu(g)$$

gdzie operatory h, g są *wolne*, a \boxplus to *wolny spłot* rozkładów.

Wniosek: probabilistyka wolna, a nie probabilistyka klasyczna, jest właściwa do opisu dużych macierzy losowych.

Grafowe wyjaśnienie pojęcia *freeness* oraz operacji \boxplus . Drzewo binarne jest *iloczynem wolnym* dwóch półprostych. Drzewo to daje rozkład graniczny sumy $H_n + G_n$ niezależnych macierzy symetrycznych



Dziękuję za uwagę!