

Autoreferat

I. Imię i Nazwisko: Piotr Kowalczyk

II. Podsumowanie cytowań prac naukowych dr. Piotra Kowalczyka za lata 2002-2019 według bazy Web of Science (stan bazy na dzień 26.02.2019) bez autocytowań. (Wykluczono te prace cytujące, w których pojawia się chociaż jeden z autorów pracy cytowanej. Dokładny wykaz cytowań oraz Impact Factor wyszczególniony dla każdej publikacji znajduje się w osobnych załączonych dokumentach.)

- **Liczba cytowań:** 1469
- **Liczba prac cytowanych:** 27
- **Indeks Hirscha :** 10*
- **Impact Factor (sumaryczny):** 34.64

*Indeks Hirscha podawany jest według bazy Web of Science (liczony z autocytowaniami, wyłącznie dla prac indeksowanych w bazie WoS).

III. Zatrudnienie w instytucjach akademickich

1. Od 19.02.2018: Zatrudniony jako adiunkt na Wydziale Matematyki w Katedrze Matematyki Stosowanej Politechniki Wrocławskiej.
2. Od 01.03.2011 do 31.01.2018: Praca na pełen etat jako Starszy Wykładowca Matematyki (Senior Lecturer of Mathematics, School of Computing, Mathematics and Digital Technology, Manchester Metropolitan University).
Obowiązki – Prowadzenie badań naukowych, publikacja artykułów naukowych; rozpowszechnianie wyników badań poprzez uczestnictwo w konferencjach i warsztatach naukowych oraz organizowanie warsztatów i sesji naukowych na konferencjach; nauczanie oraz obowiązki mentorskie; egzaminowanie; rozwijanie curriculum naukowego.
3. Od 01.02.2008 do 28.02.2011: Praca na pełen etat jako asystent w Centre for Interdisciplinary Computational and Dynamical Analysis (CICADA) School of Mathematics, the University of Manchester.
Tematyka badań: Analiza bifurkacji w układach hybrydowych (układy modelowane przez równania różniczkowe z nieciągłościami i układy dyskretne).
4. Od 01.01.2006 do 31.01.2008: Praca na pełen etat jako Wykładowca Matematyki Stosowanej w School of Engineering, Computer Science and Mathematics, the University of Exeter.
5. Od 01.01.2003 do 31.12.2005: Praca na pełen etat jako asystent w Department of Engineering Mathematics, the University of Bristol. Tematyka badań: Analiza i numeryczne obliczenia bifurkacji w układach dynamicznych kawałkami gładkich.

IV. Posiadane dyplomy i kwalifikacje akademickie

1. 7.05.2003: Zdobyte stopnia tytułu doktora. Tytuł wydany w Department of Engineering Mathematics, the University of Bristol.
2. 7.04.2003: Egzamin doktorancki

3. 01.01.2000 – 31.12.2002: The University of Bristol, United Kingdom. Studia doktoranckie w zakresie numerycznych i analitycznych badań bifurkacji typu „sliding” w układach dynamicznych typu Filippova (układy z nieciągłym polem wektorowym).
4. 01.10.1993 – 31.10.1999: Politechnika Wroclawska, Studia magisterskie na Wydziale Elektroniki i Telekomunikacji.

V. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z artykułu 16 ustawy 2 z dnia 14.03.2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 56, poz. 525 z późn. zm.).

(a) Tytuł:

Analiza i klasyfikacja jedno- i dwu-parametrycznych bifurkacji dla cykli granicznych w układach dynamicznych kawałkami gładkich.

(b) Lista publikacji składająca się na osiągnięcie naukowe:

- [K1] P. Kowalczyk. A novel route to a Hopf-bifurcation scenario in switched systems with dead zone. *Physica D*, 348(8):60-66, 2017.
- [K2] P. Glendinning, P. Kowalczyk and A. B. Nordmark. Multiple attractors in grazing-sliding bifurcations in Filippov type flows. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 81(4):711-722, 2016.
- [K3] P. Glendinning, P. Kowalczyk and A. B. Nordmark. Attractors near grazing-sliding bifurcations. *Nonlinearity*, 25(6):1867-1885, 2012.
- [K4] M. di Bernardo, A. R. Champneys, C. Budd and P. Kowalczyk. Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. *Springer*, 2008.
- [K5] P. Kowalczyk and P. T. Piiroinen. Two-parameter sliding bifurcations of periodic solutions in a dry-friction oscillator. *Physica D*, 237(8):1053-1073, 2008.
- [K6] P. Kowalczyk, M. di Bernardo, A. R. Champneys, S. J. Hogan, M. Homer, Yu. A. Kuznetsov, A. B. Nordmark and P. T. Piiroinen. Two-parameter nonsmooth bifurcations of limit cycles: classification and open problems. *Int. Journal of bifurcation and chaos*, 16(3):601-629, 2006.
- [K7] A. B. Nordmark and P. Kowalczyk. A codimension-two scenario of sliding solutions in grazing-sliding bifurcations. *Nonlinearity*, 19(1):1-26, 2006.
- [K8] P. Kowalczyk and M. di Bernardo. Two-parameter degenerate sliding bifurcations in Filippov systems. *Physica D*, 204:204 - 229, 2005.

(c) Krótkie omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników:

Układy dynamiczne kawałkami gładkie to modele matematyczne układów, które można opisać za pomocą ewolucji z komponentą ciągłą jak i skokową, co prowadzi do nieciągłości. Obecność nieciągłości może przyczynić się do zmian w strukturze przestrzeni fazowej, pod wpływem zmian parametrów, których nie obserwuje się w układach różniczkowalnych - przykładami są tu prace [95, 11, 21, 18, 19, 17, 37, 99, 46, 33, 12, 13, 25, 98, 2, 26, 15, 20, 63, 64, 94, 51, 24, 29]. Wspomniane zmiany strukturalne przestrzeni fazowej w układach kawałkami gładkich noszą nazwę bifurkacji wywołanych nieciągłościami, w skrócie DIBs (z angielskiego discontinuity induced bifurcations - DIBs) [35, 34, 81]. Celem prac, które stanowią przedmiot mojej habilitacji jest rozwinięcie teorii dla lokalnych jedno- i dwu-parametrycznych bifurkacji wywołanych nieciągłościami (DIBs) w układach dynamicznych kawałkami gładkich. W rozdziale 3., w głównej części autoreferatu, gdzie przedstawione są wyniki stanowiące przedmiot habilitacji, przedstawiam jedno-parametryczne formy normalne dla tzw. bifurkacji DIB typu sliding. Ten typ bifurkacji DIB dotyczy cykli granicznych w układach Filippova (układy z nieciągłym polem wektorowym). Formy normalne są tzw. odwzorowaniami przez nieciągłość i były po raz pierwszy wyprowadzone przeze mnie w [KO1]. Wyprowadziłem je ponownie używając innej techniki na

potrzeby monografii [K4]. Zupełna klasyfikacja zachowań dynamicznych dla jedno-parametrycznych bifurkacji DIB jest ciągle zagadnieniem otwartym. W szczególności w [K2,K3] jest zaprezentowana klasyfikację zachowania dynamicznego w trójwymiarowej przestrzeni fazowej układów Filippova dla jedno-parametrycznej bifurkacji typu DIB zwanej *grazing-sliding*, która prowadzi do powstania wielu stabilnych zbiorów granicznych z jednego cyklu granicznego. Tego typu bifurkacja nie może mieć miejsca w różniczkowalnych układach dynamicznych. Istotne pytanie, powiązane z jedno-parametrycznymi bifurkacjami typu DIB, które zostało zaadresowane w [K1] dotyczy rodzaju perturbacji, które mogą prowadzić do jedno-parametrycznych bifurkacji typu DIB. W [K1] przeanalizowałem zachowanie dynamiczne w układzie Filippova o trzech strefach, w otoczeniu jedno-parametrycznej bifurkacji typu DIB, dla zupełnie innego typu perturbacji niż dla przypadków analizowanych w [K2-K8]. Perturbacja, którą wziąłem pod uwagę w [K1] dotyczy zmiany struktury rozmaitości określającej nieciągłość. W ten sposób odkryłem nową bifurkację o charakterze superkrytycznej bifurkacji Hopfa.

Wyniki przedstawione w [K6] stanowią podstawę teorii dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB w układach kawałkami gładkich. Do rozwinięć dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB można wykorzystać odpowiednio złożone formy normalne dla jedno-parametrycznych bifurkacji DIB, co zostało wykorzystane w pracach [K5,K8], by rozwinąć dwa różne przypadki dwu-parametrycznych bifurkacji DIB typu sliding w układach Filippova. W [K5] i [K7] wyprowadziłem formy normalne, by móc rozwinąć nowe przypadki dwu-parametrycznych bifurkacji dla cykli granicznych w układach kawałkami gładkich (również dla układów Filippova).

(d) Wkład własny do wyników zawartych w publikacjach będących przedmiotem habilitacji:

Jednym z głównych wyników prezentowanego osiągnięcia są następujące twierdzenia (numeracja jak w autoreferacie). Twierdzenia te są moim wyłącznym wkładem, oprócz twierdzeń 3, 5 i 6 gdzie podaję wkład procentowy. Mój wkład procentowy do każdej z publikacji, na podstawie, których są sformułowane twierdzenia 1-7 jest określony na stosownym oświadczeniu, które załączyłem i jest on potwierdzony oświadczeniami współautorów. Mój główny specjalistyczny wkład i ekspertyza dotyczą bifurkacji DIB dla cykli granicznych w układach Filippova (w monografii jest to rozdział 8). W szczególności, mój całkowity lub procentowy wkład dotyczy:

- Twierdzenie 1 - wyprowadzenie form normalnych na potrzeby monografii [K4] dla jedno-parametrycznych bifurkacji sliding;
- Twierdzenie 2 - wyprowadzenie formy normalnej dla dwu-parametrycznej zdegenerowanej bifurkacji crossing-sliding;
- Twierdzenie 3 - rozwinięcie bifurkacji niehiperbolicznej typu grazing-sliding (wkład 50%);
- Twierdzenie 4 - rozwinięcie dwu-parametrycznej bifurkacji z równoczesnym wystąpieniem bifurkacji grazing-sliding i adding-sliding;
- Twierdzenie 5 i 6 - redukcja trójwymiarowego potoku Filippova do jednowymiarowego odwzorowania z nieciągłościami i klasyfikacja bifurkacji grazing-sliding prowadząca do powstania mnogości atraktorów z jednego atraktora (wkład 40%);
- Twierdzenie 7 - analiza nowej bifurkacji typu Hopf w układzie planarnym Filippova o trzech strefach i z symetrią.

VI. Szczegółowym omówieniem tych i innych wyników poświęcona jest pozostała część autoreferatu. Omówienie wskazanego osiągnięcia: Rozdziały 1-3. Omówienie pozostałych osiągnięć: Rozdział 4.

1 Wstęp

W skali makroskopowej, modele matematyczne układów, które można opisać za pomocą ewolucji z komponentą ciągłą jak i skokową, tzw. układy dynamiczne kawałkami gładkie (nazywane układami hybrydowymi np. w literaturze inżynierskiej powiązanej z automatyką), można znaleźć w wielu dziedzinach nauki.

Układy, które w skali makroskopowej można opisać za pomocą ewolucji kawałkami gładkiej to np. zachowanie samolotu w locie, którego pozycja zmienia się w sposób ciągły w czasie, ale kontrola następuje w dyskretnych momentach czasu, zatem mamy do czynienia z układem kawałkami gładkim; inny model to rozwój i podział komórek: rozwój to proces ciągły, podział jest natomiast procesem dyskretnym. W literaturze powiązanej z automatyką czy mechaniką, modelowanie, projektowanie systemów kontroli za pomocą nieciągłości jest stosowane już od wielu dekad [7, 4, 9, 10, 6, 1, 2, 79].

Do zrozumienia dynamiki układów różniczkowalnych, np. pól wektorowych lub odwzorowań, konieczna jest analiza bifurkacji i kontynuacja numeryczna zbiorów niezmienniczych. Bifurkacje, w kontekście różniczkowalnych pól wektorowych, informują o zmianach stabilności strukturalnej systemu jako funkcji parametrów systemowych, co można przełożyć na zmianę w ilości oraz stabilność zbiorów niezmienniczych, takich jak: punkty węzłowe, cykle graniczne, atraktory quasi-okresowe lub chaotyczne dla pól wektorowych, lub punkty stałe, okresowe, quasi-okresowe lub chaotyczne dla odwzorowań [54, 83, 62].

Nawet układy planarne kawałkami liniowe o dwóch strefach mogą generować złożone zachowania dynamiczne [46, 20], więc nie powinno stanowić zaskoczenia, że dużo wysiłku poświęcono, by zaproponować teorię, która opisałaby w sposób usystematyzowany bifurkacje (jakościowe zmiany w strukturze przestrzeni fazowej powiązane ze zbiorami niezmienniczymi) w układach kawałkami gładkich. Okazało się, że obecność nieliniowości wynikających z nieciągłości może przyczynić się do zmian w strukturze przestrzeni fazowej, pod wpływem zmian parametrów, których nie obserwuje się w układach różniczkowalnych - przykładami są tu prace [95, 11, 21, 18, 19, 17, 37, 99, 46, 33, 12, 13, 25, 98, 2, 26, 15, 20, 63, 64, 94, 51, 24, 29]. Wspomniane zmiany strukturalne przestrzeni fazowej w układach kawałkami gładkich noszą nazwę bifurkacji wywołanych nieciągłościami, w skrócie DIBs (z angielskiego discontinuity induced bifurcations - DIBs) [35, 34, 81].

Bifurkacje wywołane nieciągłościami mogą prowadzić do gwałtownych zmian w zachowaniu układu. Przykładowo tzw. bifurkacja typu *grazing-sliding* może wywołać zmianę zachowania ewolucji ze stabilnego zachowania okresowego do ewolucji po atraktorze chaotycznym, który, co więcej, istnieje dla otwartego zbioru wartości parametru bifurkacyjnego [KO2, KO3]. W literaturze zostało również pokazane, że DIB może spowodować powstanie wielu stabilnych zbiorów niezmienniczych z jednego atraktora [12, 77]. Tego typu bifurkacja może być zaobserwowana tylko w układach kawałkami gładkich. Bifurkacje w układach różniczkowalnych, jak też bifurkacje wywołane nieciągłościami, które występują w układach powiązanych z zastosowaniami są po pierwsze wielowymiarowe [65, 100], a po drugie, struktura bifurkacji jest lepiej zrozumiana jeżeli można otrzymać przynajmniej dwu-parametryczne diagramy bifurkacyjne, tzn. wtedy, gdy istnienie i stabilność zbiorów niezmienniczych jest przedstawiona w przestrzeni dwu-parametrycznej, tak jak np. w [71, 76, 91, 73, 97, 59].

Prace, które stanowią przedmiot mojej habilitacji dotyczą lokalnych jedno i dwu-parametrycznych bifurkacji wywołanych nieciągłościami (DIBs) w układach dynamicznych kawałkami gładkich. Jest istotnym, by wspomnieć, że dla systemów kawałkami gładkich nie ma ogólnie przyjętej definicji bifurkacji ani kowymiaru bifurkacji typu DIB. Z tego względu w autoreferacie jest używany termin jedno i dwu-parametrycznych bifurkacji wywołanych nieciągłościami. Bifurkacje typu DIBs mogą, lecz nie zawsze powodują, zmianę stabilności, lub ilości zbiorów niezmienniczych w systemie, który ulega bifurkacji typu DIB. Niemniej dla szczególnych przypadków wprowadzono definicję. Np. jedno-

parametryczne bifurkacje typu DIB w układach planarnych Filippova, tzn. w układach z nieciągłym polem wektorowym są zdefiniowane i analizowane w [63].

W rozdziale 2, przedstawiłem definicje, które są konieczne, by sklasyfikować układy z nieciągłościami będące przedmiotem tego autoreferatu, jak też wprowadziłem podstawowe narzędzia, tzw. nieautonomiczne odwzorowanie przez nieciągłość (ZDM) oraz odwzorowanie przez nieciągłość za pomocą przekroju Poincarégo (PDM), które są użyte, by wyprowadzić formy normalne dla jedno i dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB, dla różnych klas systemów nieciągłych.

W rozdziale 3, gdzie przedstawione są wyniki stanowiące przedmiot habilitacji, przedstawiam jedno-parametryczne formy normalne dla tzw. bifurkacji DIB typu sliding. Ten typ bifurkacji DIB dotyczy okresowych zbiorów granicznych w układach Filippova (układy z nieciągłym polem wektorowym). Formy normalne są odwzorowaniami przez nieciągłość i były po raz pierwszy wyprowadzone przeze mnie w [KO1]. Wyprowadziłem je ponownie używając innej techniki na potrzeby monografii [K4]. Otrzymane formy normalne są użyte w pracach [K5,K7,K8], by rozwinąć dwa różne przypadki dwu-parametrycznych bifurkacji DIB typu sliding w układach Filippova. Wyniki przedstawione w [K6] stanowią podstawę klasyfikacji dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB w układach kawałkami gładkich. Klasyfikacja zaproponowana w [K6] jest powiązana z klasyfikacją bifurkacji o ko-wymiarze dwa dla gładkich systemów dynamicznych.

Mianowicie, rozważamy następujące trzy kategorie dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB, okresowych zbiorów granicznych (cykli granicznych), określonych w następujący sposób:

1. warunek na ogólność formy normalnej jedno-parametrycznej bifurkacji typu DIB nie jest spełniony;
2. okresowy zbiór graniczny nie jest hiperboliczny;
3. rozważamy jednoczesne wystąpienie dwóch niezależnych kontaktów typu *grazing* pomiędzy polem wektorowym a rozmaitością określającą nieciągłość, w dwóch niezależnych punktach zbioru niezmienniczego.

W [K6] zaprezentowałem przykłady ilustrujące każdą z trzech różnych klas, wymienionych powyżej, dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB. Przykłady pokazane w [K6] są wynikiem numerycznym i z wyjątkiem jednego przypadku, bifurkacje są pokazane, że występują w makroskopowych modelach oscylatorów opisujących sytuacje z suchym tarciem. W [K7], wprowadziłem metodologię umożliwiającą rozwinięcie dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB dla niehiperbolicznych cykli granicznych charakteryzujących się jednym kontaktem typu *grazing* pomiędzy polem wektorowym a rozmaitością określającą nieciągłość (zobacz Rozdział 2). Wyniki, rozwinięte w Twierdzeniu 3, dotyczą istnienia krzywych bifurkacyjnych w otoczeniu punktu o kowymiarze dwa w przestrzeni dwu-parametrycznej. Analiza rozwinięcia dwu-parametrycznej bifurkacji jest następnie zilustrowana analitycznie i numerycznie przy użyciu przykładu układu Filippova z mechaniki. W modelu dwu-parametryczna bifurkacja DIB należąca do kategorii 2 jest rozwinięta i zachowanie układu w otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa jest przeanalizowane przy użyciu rozwinięcia analitycznego dwu-parametrycznej bifurkacji. Strategia rozwijania dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB zaprezentowana w [K7] może zostać użyta do rozwijania innych przypadków bifurkacji typu DIB klasy 2 dla różnego charakteru nieciągłości w układach dynamicznych kawałkami gładkich. W [K8] wyprowadziłem warunki dla czterech przypadków jedno-parametrycznych bifurkacji typu *sliding*, gdy warunek na ogólność formy normalnej nie jest spełniony. W tej publikacji zaprezentowałem pierwszy przypadek dwu-parametrycznej bifurkacji typu *crossing-sliding* z niespełnionym warunkiem na ogólność formy normalnej, w modelu oscylatora z suchym tarciem. Rozwinięcie teoretyczne dwu-parametrycznej bifurkacji typu *crossing-sliding* z niespełnionym warunkiem na ogólność przedstawiłem następnie w [K5]. Rozwinięcie zostało wyprowadzone przy pomocy odwzorowania przez nieciągłość typu ZDM. Ten wynik jest przedstawiony w Twierdzeniu 2 autoreferatu.

W [K5], pokazałem rozwinięcie analityczne bifurkacji typu DIB należącej do trzeciej klasy bifurkacji dwu-parametrycznych w układach kawałkami gładkich, polegające na jednoczesnym wystąpieniu dwóch jedno-parametrycznych bifurkacji typu *sliding*. Wyniki analityczne zilustrowałem używając modelu, który prezentuje wyniki numeryczne zachowania układu wokół punktu o ko-wymiarze dwa w przestrzeni parametrycznej. Istotnym wynikiem prac teoretycznych stanowiących przedmiot habilitacji jak również zaproponowana w [K6] klasyfikacja dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB pozwala

na rozwinięcie technik numerycznych pozwalających na kontynuację parametryczną zbiorów niezmienniczych w układach kawałkami gładkich [41, 32, 31, 52, 82], co stanowi istotny element teorii bifurkacji. Poza teorią bifurkacji dwu-parametrycznych typu DIB w układach kawałkami gładkich, którą przedstawiłem w autoreferacie, przedmiotem autoreferatu jest również klasyfikacją zachowań dynamicznych wynikających z jedno-parametrycznych bifurkacji typu DIB, w szczególności tych przypadków, które dla różnej klasy systemów kawałkami gładkich prowadzą do jakościowo tego samego zachowania dynamicznego. Tego typu bifurkacje typu DIB są analizowane w [K5,K6,K7].

W szczególności w [K2,K3] prezentujemy klasyfikację zachowania dynamicznego w trójwymiarowej przestrzeni fazowej układów Filippova dla jedno-parametrycznej bifurkacji typu DIB zwanej *grazing-sliding*. W szczególności przeprowadziłem redukcję trójwymiarowego układu Filippova do jedno-wymiarowego odwzorowania nieciągłego, w lokalnym otoczeniu okresowego zbioru granicznego podlegającego bifurkacji typu *grazing-sliding*, która prowadzi do powstania wielu stabilnych zbiorów granicznych z jednego cyklu granicznego. Tego typu bifurkacja nie może mieć miejsca w różniczkowalnych polach wektorowych. Skonstruowałem pierwszy przykład strumienia Filippova, w którym zaobserwowano tego typu bifurkację typu *grazing-sliding* w [K2]. Wyniki zaprezentowane w [K2,K3] sugerują nowe kierunki badań. Po pierwsze, redukcja strumienia do odwzorowania za pomocą odwzorowania ZDM i odpowiadające danemu strumieniowi lokalne zachowanie dynamiczne zależy od wymiaru strumienia, jak też od struktury przestrzeni fazowej układu dynamicznego kawałkami gładkiego. Z tego wynika możliwość klasyfikacji bifurkacji typu DIB, z różnych klas układów kawałkami gładkich o różnych wymiarach przestrzeni fazowej, na podstawie zachowania dynamicznego zredukowanych odwzorowań pełniących rolę form normalnych dla danych bifurkacji typu DIB. Innymi słowy, różnowymiarowe formy normalne mogą należeć do tej samej klasy form normalnych dla bifurkacji typu DIB. W szczególnym przypadku można usiłować rozwinąć ujednoliconą lokalną teorię jedno-parametrycznych bifurkacji typu DIB, które prowadzą do powstawania wielu atraktorów z jednego atraktora.

Kolejne pytanie powiązane z jedno-parametrycznymi bifurkacjami typu DIB, które zostało zaadresowane w [K1] dotyczy rodzaju perturbacji, które mogą prowadzić do jedno-parametrycznych bifurkacji typu DIB. W [K1] przeanalizowałem jedno-parametryczną bifurkację typu DIB, zupełnie innego typu niż przypadki analizowane w [K2-K8]. Perturbacja, którą wziąłem pod uwagę w [K1] dotyczyła zmiany struktury rozmaitości określającej nieciągłość. W ten sposób odkryłem nową bifurkację, w planarnych układach Filippova o trzech strefach, o charakterze superkrytycznej bifurkacji Hopfa. Tego typu układy są wykorzystywane w modelowaniu matematycznym zachowań kontrolnych systemu neuromotorycznego u ludzi. Również w przypadku analizowanym w [K1] można postawić pytanie dotyczące uogólniej teorii, która przedstawiłaby kiedy i jakie jedno-parametryczne perturbacje różnych klas układów kawałkami gładkich prowadzą do jedno-parametrycznej superkrytycznej bifurkacji Hopfa typu DIB. W [K1] pokazałem w sposób numeryczny, że dwie jedno-parametryczne perturbacje prowadzące do dwóch różnych układów kawałkami gładkich prowadzą do tej samej jedno-parametrycznej superkrytycznej bifurkacji Hopfa typu DIB. W jednym przypadku perturbacja zmieniała charakter zależności rozmaitości określającej nieciągłość w systemie Filippova a w drugim perturbacja zmieniła wymiar systemu Filippova poprzez wprowadzenie opóźnienia czasowego do zmiennej określającej nieciągłość. Podobnie jak w przypadku bifurkacji, które prowadzą do powstania wielu atraktorów z jednego atraktora otwartym pozostaje pytanie dotyczące możliwości opracowania teorii opisującej jedno-parametryczną bifurkację o charakterze Hopfa w różnych klasach systemów kawałkami gładkich. Kilka różnych typów bifurkacji typu DIB o charakterze Hopfa zostało przeanalizowanych w literaturze, np. [66, 101, 76, 5].

2 Układy kawałkami gładkie stanowiące przedmiot badań

2.1 Podstawowe definicje

Definicja 1 Strumień kawałkami gładki jest dany jako skończony zbiór równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad \text{dla } x \in S_i, \quad (1)$$

gdzie $\cup_i S_i = \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ i żadne wnętrze zbioru S_i nie jest puste. Przekrój $\Sigma_{ij} := \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$ jest albo $\mathbb{R}^{(n-1)}$ rozmaitością zawartą w domknięciach ∂S_j i ∂S_i , albo jest zbiorem pustym. Każde pole wektorowe F_i jest wystarczająco gładkie względem stanu x i parametru μ i generuje odpowiadający temu polu potok, powiedzmy $\Phi_i(x, t)$, we wnętrzu otwartego zbioru S_i . Niemniej, każdy potok Φ_i jest zdefiniowany na całym zbiorze \mathcal{D} .

Zbiór niepusty będący granicą pomiędzy dwoma rejonami Σ_{ij} będzie nazywany **zbiorem nieciągłym, granicą nieciągłości** lub, czasami, **rozmaitością przełączania**. Zakładamy, że każdy zbiór Σ_{ij} ma ko-wymiar jeden, tzn. jest $(n-1)$ -wymiarową gładką rozmaitością (lokalnie jest dyfeomorficzny z \mathbb{R}^{n-1}) zawarty w n -wymiarowej przestrzeni fazowej. Co więcej, każdy zbiór Σ_{ij} jest kawałkami gładki. Tzn. składa się ze skończonej ilości kawałków tak gładkich jak potok.

Definicja 2 Stopień nieciągłości w jakimś punkcie x na zbiorze przełączania Σ_{ij} kawałkami gładkiego układu równań różniczkowych jest równy stopniowi pierwszej niezerowej pochodnej cząstkowej względem zmiennej t obliczonej dla różnicy potoków $\Phi_i(x, t) - \Phi_j(x, t)$ dla $t = 0$.

Rozważmy teraz układ równań różniczkowych z jedną rozmaitością, którą nazwiemy Σ_{12} , która określa nieciągłość. Taki układ możemy zapisać w postaci:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & x \in S_1, \\ F_2(x, \mu), & x \in S_2, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie F_1 generuje potok Φ_1 a F_2 potok Φ_2 . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi_i(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= F_i(x), \\ \left. \frac{\partial^2 \Phi_i(x, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= \frac{\partial F_i}{\partial t} = \frac{\partial F_i}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = F_{i,x} F_i(x), \end{aligned}$$

gdzie indeks dolny x oznacza pochodną cząstkową względem zmiennej x . Podobnie:

$$\left. \frac{\partial^3 \Phi_i(x, t)}{\partial t^3} \right|_{t=0} = F_{i,xx} F_i^2 + F_{i,x}^2 F_i,$$

itd. Więc jeżeli pola wektorowe F_1 i F_2 różnią się dla m tej pochodnej cząstkowej względem zmiennej x , wtedy potoki Φ_1 i Φ_2 różnią się dla $(m+1)$ ej pochodnej cząstkowej względem zmiennej t .

Więc jeżeli $F_1(x) \neq F_2(x)$ mamy stopień nieciągłości jeden w punkcie $x \in \Sigma_{12}$. Układy o stopniu nieciągłości jeden nazywamy układami *Filippova*.

Definicja 3 O granicy nieciągłości Σ_{ij} mówimy, że jest **jednorodnie nieciągła** w dziedzinie \mathcal{D} , jeżeli stopień nieciągłości układu jest taki sam dla każdego $x \in \Sigma_{ij} \cap \mathcal{D}$. Co więcej, mówimy, że nieciągłość jest **jednorodna o stopniu m** , jeżeli pierwsza niezerowa pochodna cząstkowa różnicy $F_i - F_j$ określona na Σ_{ij} jest rzędu $m-1$. Stopień nieciągłości jest jeden jeżeli $F_i(x) - F_j(x) \neq 0$ dla $x \in \Sigma_{ij} \cap \mathcal{D}$.

2.2 Układy Filippova

Przypadek układów Filippova o jednorodnym stopniu nieciągłości jeden musi być traktowany ze szczególną uwagą, bo musimy uwzględnić możliwość ewolucji typu *sliding*. W celu zdefiniowania ewolucji typu *sliding* będziemy rozważać system kawałkami gładki, charakteryzujący się tylko jedną granicą nieciągłości zdefiniowaną poprzez zbiór punktów x takich, dla których pewna funkcja gładka $H = H(x)$ zeruje się. W dostatecznie małym otoczeniu tej granicy $H(x)$, dzieli przestrzeń fazową na dwa rejon. W szczególności, weźmy pod uwagę układ (3) zdefiniowany w rejonie $D \subset \mathbb{R}^n$, który charakteryzuje się jednym zbiorem nieciągłości granicznej $\Sigma_{12} = \Sigma$. To znaczy interesuje nas układ:

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x, \mu), & H(x, \mu) > 0, \\ F_2(x, \mu), & H(x, \mu) < 0, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie pole wektorowe F_1 generuje potok Φ_1 , a F_2 potok Φ_2 ; F_1, F_2 są wystarczająco gładkimi funkcjami wektorowymi a $H(x, \mu)$ jest funkcją skalarną, która zależy od stanu $x \in \mathbb{R}^n$ i parametru $\mu \in \mathbb{R}^m$. Obszar D jest podzielony na dwa obszary, S_1 i S_2 , na których ewolucja jest generowana przez gładkie pola wektorowe F_1 bądź F_2 . Zakładamy, że granica nieciągłości Σ , pomiędzy S_1 i S_2 , jest gładką hiperpłaszczyzną. Definiujemy:

$$S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : H(x, \mu) > 0\}, \quad (4)$$

$$S_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : H(x, \mu) < 0\}, \quad (5)$$

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : H(x, \mu) = 0\}. \quad (6)$$

Otrzymana w ten sposób topologia przestrzeni fazowej prowadzi do możliwości ewolucji typu sliding na Σ . To znaczy w zależności od kierunku pól wektorowych F_i ($i = 1, 2$) względem Σ , można skonstruować potok dla układu (3) poprzez łączenie potoków Φ_1, Φ_2 (wtedy, gdy pola wektorowe wskazują ten sam kierunek względem granicy nieciągłości Σ) lub w przypadku, gdy pola wektorowe wskazują w kierunku przeciwnym względem granicy Σ , układ może generować potok na powierzchni Σ . W tym drugim przypadku wymagane jest zdefiniowanie pola wektorowego na Σ . Oznaczmy pochodną kierunkową z funkcji $H(x)$ w kierunku pola wektorowego F jako $H_x F$. Wtedy, $\forall x \in \Sigma$, gdy iloczyn $(H_x F_1)(H_x F_2) > 0$ następuje przełączenie pomiędzy potokami układu Filippova (3) generowanymi przez pola wektorowe F_1 and F_2 na granicy Σ . Z drugiej strony, $\forall x \in \Sigma$, gdy iloczyn $(H_x F_1)(H_x F_2) < 0$, istnieje potok, który generuje rozwiązania na granicy Σ . Istnieją różne formalizmy, które pozwalają zdefiniować taki potok na Σ , który w literaturze nosi nazwę potoku *sliding*. Powszechnie stosowany formalizm to metoda Filippova polegająca na wykorzystaniu kombinacji wypukłej pól wektorowych do zdefiniowania pola wektorowego typu *sliding*. To znaczy pole wektorowe generujące potok na Σ definiujemy jako:

$$F_{12} = (1 - \alpha)F_1 + \alpha F_2, \quad (7)$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$ oraz

$$\alpha(x) = -\frac{H_x F_1}{H_x (F_2 - F_1)}. \quad (8)$$

Czasami, w wypadku gdy nie będzie to powodowało niejednoznaczności będziemy pisali:

$$F_{ij} := F_s,$$

by oznaczyć pole wektorowe typu sliding.

Za pomocą funkcji α możemy na Σ zdefiniować rejon gdzie jest możliwa ewolucja typu sliding. To znaczy:

$$\hat{\Sigma} := \{x \in \Sigma : 0 < \alpha(x) < 1\}$$

definiuje rejon typu sliding. Granice rejonu definiujemy jako:

$$\partial\hat{\Sigma}^+ := \{x \in \Sigma : \alpha(x) = 1\},$$

i

$$\partial\hat{\Sigma}^- := \{x \in \Sigma : \alpha(x) = 0\}.$$

Zakładamy, że na $\hat{\Sigma} \cup \partial\hat{\Sigma}^+ \cup \partial\hat{\Sigma}^-$, $H_x (F_2 - F_1) > 0$, z czego wynika istnienie tzw. rejonu typu *stabilny sliding*. Wtedy pola wektorowe F_1 i F_2 dla x w dostatecznie małym otoczeniu $\hat{\Sigma}$ wskazują w kierunku Σ .

2.3 Układy hybrydowe

Definicja 4 Kawalkami gładki układ hybrydowy jest opisany poprzez zbiór równań różniczkowych zycząjnych:

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad \text{if } x \in S_i, \quad (9)$$

oraz zbiór tzw. odwzorowań restartujących:

$$x \mapsto R_{ij}(x, \mu), \quad \text{if } x \in \Sigma_{ij} := \bar{S}_i \cap \bar{S}_j. \quad (10)$$

Zbiory $\cup_i S_i = \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ i S_i mają niepuste wnętrze. Każda granica Σ_{ij} jest $\mathbb{R}^{(n-1)}$ -wymiarową rozmaitością zawartą w granicy ∂S_j i ∂S_i , albo jest zbiorem pustym. Zakładamy, że każde pole wektorowe F_i i odwzorowanie R_{ij} są wystarczająco gładkie i zdefiniowane, odpowiednio, w otwartym otoczeniu S_i i Σ_{ij} .

Kanonicznym przykładem modelu układu hybrydowego, w kontekście mechaniki, jest tzw. oscylator uderowy. W tym przypadku Σ_{ij} pełni rolę powierzchni ograniczającej takiej, że odwzorowanie restartujące odwzorowuje zbiór Σ_{ij} na siebie.

Definicja 5 Udarowy układ hybrydowy jest to kawałkami gładki układ hybrydowy, dla którego $R_{ij} : \Sigma_{ij} \rightarrow \Sigma_{ij}$, i potok jest ograniczony do ewolucji po jednej stronie granicy nieciągłości, tzn. na $\bar{S}_i = S_i \cup \Sigma_{ij}$.

Ze względu na powyższą definicję, odwzorowanie R_{ij} jest nazywane *prawem uderowym* lub *regułą uderową*. Podobnie, granice nieciągłości Σ_{ij} określa się jako *powierzchnie uderowe*, a sytuację gdy trajektoria układu wchodzi w interakcję z rozmaitością Σ_{ij} jako *zdarzenie uderowe* albo jako *udar*.

2.4 Odwzorowanie przez nieciągłość

Definicja 6 Odwzorowanie przez nieciągłość Q , w przypadku poprzecznego przekraczania zbioru nieciągłego Σ_{ij} , jest dodatkowym odwzorowaniem, które musi być wzięte pod uwagę przy tworzeniu kompozycji odwzorowań wygenerowanych przez potoki Φ_i i Φ_j dla potoku kawałkami gładkiego lub układu hybrydowego, którego trajektoria przekracza zbiór nieciągły. Jeżeli trajektoria przekracza zbiór Σ w takim sensie, że nastąpi ewolucja z rejonu S_i do S_j , to właściwe odwzorowanie wygenerowane przez potoki i przekroczenie nieciągłości ma postać $\Phi_j \circ Q \circ \Phi_i$. Jakobian Q_x z odwzorowania Q nazywa się **macierzą przeskokową**.

Przykład 1 Przekraczanie poprzeczne nieciągłości w układzie Filippova o dwóch rejonach. Jeżeli trajektoria układu Filippova przekracza rozmaitość przełączającą poza rejonem, gdzie jest możliwa ewolucja typu sliding, z rejonu S_1 do S_2 , to wtedy macierz przeskokowa wyrażona jest wzorem

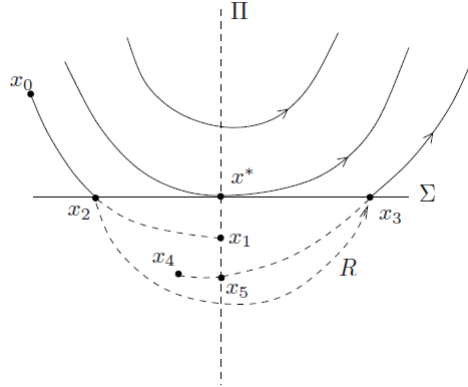
$$Q_x = I + \frac{(F_2 - F_1)H_x}{H_x F_1}, \quad (11)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Wyrażenie (11) zostało po raz pierwszy wyprowadzone w [3].

Przykład 2 Przekraczanie poprzeczne nieciągłości w układzie Filippova o dwóch rejonach na podzbiorze, gdzie jest możliwa ewolucja sliding. Macierze przeskokowe mogą być również zastosowane dla trajektorii, które osiągają zbiór nieciągłości na podzbiorze gdzie są ograniczone do ewolucji typu sliding. Macierz skokowa w przypadku, gdy dochodzi do przełączenia z rejonu S_1 do rejonu $\hat{\Sigma}$, gdzie jest możliwa ewolucja sliding, jest dana wzorem:

$$I + \frac{(F_{12} - F_1)H_x}{H_x F_1},$$

gdzie F_{12} to pole wektorowe typu sliding zdefiniowane przez wyrażenie (7).



Rysunek 1: Schematyczna ilustracja odzworowań ZDM i PDM w otoczeniu punktu kontaktowego typu *grazing* (por. Definicja 10). Na rysunku linia ciągła oznacza rzeczywisty potok układu hybrydowego, a linia przerywana oznacza potok rozszerzony. Odzworowanie ZDM jest odzworowaniem $x_1 \mapsto x_4$ a PDM odzworowuje $x_1 \rightarrow x_5$.

2.5 Przecięcia styczne typu *grazing*

Odwzorowania przez nieciągłość z przykładów 1 i 2 zostały wyprowadzone biorąc pod uwagę warunek na przecięcie poprzeczne rozmaitości określającej nieciągłość, tzn. wymagamy, by $H_x F_1 \neq 0$. Gdy warunek na przecięcie poprzeczne nie jest spełniony, tzn. wtedy gdy $v = H_x(x^*)F_1(x^*) = 0$ dochodzi do tzw. kontaktu *grazing* pomiędzy trajektorią wygenerowaną przez potok a powierzchnią Σ (c.f. Definicja 10).

Taka sytuacja jest przedstawiona schematycznie na rysunku 1. Na rysunku jest oznaczona trajektoria przecinająca punkt x^* , którą zakładamy, że jest częścią cyklu granicznego, który leży całkowicie w rejonie S_1 . Zakładamy, że dochodzi do kontaktu typu *grazing* pomiędzy tą trajektorią a zbiorem Σ w punkcie x^* w momencie t^* .

By skonstruować odzworowanie przez nieciągłość, w przypadku kontaktu typu *grazing*, musimy wziąć pod uwagę ewolucję dwóch różnych trajektorii o warunkach początkowych w otoczeniu x^* . Pewne trajektorie nie przekroczą Σ w otoczeniu x^* i dla tych trajektorii odzworowanie przez nieciągłość jest tożsame. Z drugiej strony, odzworowanie przez nieciągłość będzie nietrywialne dla trajektorii takich, jak na rysunku 1. Trajektoria przekracza punkt x_0 w pobliżu Σ w czasie t_0 , następnie przekracza Σ w punkcie x_2 w czasie $t_2 = t^* + \delta$, następnie jest odzworowywana do punktu x_3 przez odzworowanie $\Phi_2(R(x_2), t_3 - t_2)$ i ewolucja jest kontynuowana w S_1 od tego punktu. Powyższy przypadek bierze pod uwagę zarówno udarowy układ hybrydowy, kiedy to Φ_2 jest tożsamością, jak też przypadek potoku kawałkami gładkiego, dla którego R jest tożsamością. W tym drugim przypadku, $t_3 - t_2$ jest czasem ewolucji układu do momentu powtórnego przekroczenia granicy Σ .

Opiszemy dwa różne sposoby definiowania odzworowań przez nieciągłość. Te odzworowania można skonstruować tak, jak odzworowanie przez nieciągłość dla trajektorii poprzecznie przekraczających granicę Σ , tak że całkowity czas ewolucji jest równy zero — tak zwane *bezczasowe odzworowanie przez nieciągłość (ZDM)* — lub jako odzworowanie zdefiniowane względem jakiegoś lokalnego przekroju *Poincarégo* — *odzworowanie przez nieciągłość z użyciem przekroju Poincarégo (PDM)*. Przedstawiona analiza jest zainspirowana metodą użytą dla przypadku n -wymiarowego układu udarowego [45], która to analiza rozszerzyła wcześniejsze wyniki wyprowadzeń odzworowań normalnych ZDM dla układów udarowych [84, 96, 75, 55]. Konstrukcje ZDM i PDM pozwalają na takie sformułowanie problemu znalezienia lokalnego odzworowania przez nieciągłość, które pozwala na zawarcie efektu jaki wywołuje na trajektorie kontakt z rozmaitością nieciągłą w dostatecznie małym otoczeniu trajektorii typu *grazing*, przy pomocy zdefiniowania nowych zmiennych, które mierzą odległość pomiędzy trajektoriami, a granicą nieciągłości.

By wytłumaczyć różnicę pomiędzy odwzorowaniami ZDM i PDM, rozważmy trajektorię z rysunku 1, która przecina punkt x_0 . Trajektoria przecina Σ w punkcie x_2 , następnie jest odwzorowywana do x_3 gdzie, następnie, podlega ewolucji do punktu startowego x_0 . Rozszerzając gładkie pole wektorowe $F_1(x)$ zdefiniowane dla $H(x) > 0$ (który to rejon jest „powyżej” granicy Σ w S_1) do rejonu $H(x) < 0$ (tak, by można rozszerzyć trajektorie „poniżej” granicy Σ) możemy kontynuować ewolucję trajektorii od punktu x_2 za pomocą odwzorowania wygenerowanego przez potok Φ_1 , lub kontynuować ewolucję „wstecz” do punktu x_3 . Jako, że punkt x_0 jest blisko do x^* , wtedy gładka trajektoria wygenerowana z punktu x_2 przez potok Φ_1 przetnie przekrój Poincarégo

$$\Pi_N = \{x : v = H_x(x)F_1(x) = 0\}$$

w punkcie x_1 w pobliżu $x^* = 0$. Podobnie, kontynuacja potoku wstecz z punktu x_3 przetnie Π_N w punkcie x_5 . Odwzorowanie, które odwzorowuje x_1 do x_5 jest odwzorowaniem przez nieciągłość przy użyciu przekroju Poincarégo. Powyższe sformułowanie problemu pozwala, by przy pomocy Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej znaleźć wyrażenie na PDM, które zależy tylko od lokalnych własności pola wektorowego względem powierzchni przełączającej Σ .

Definicja 7 *Odwzorowaniem przez nieciągłość przy użyciu przekroju Poincarégo (PDM) w pobliżu $x^* = 0$ jest odwzorowaniem przez nieciągłość zdefiniowanym na odpowiednim przekroju Poincarégo Π_N , który jest poprzeczny względem potoku generującego trajektorie układu, zawiera zbiór punktów typu grazing, przecina Σ poprzecznie i odwzorowuje warunki początkowe z Π_N z powrotem na Π_N . Nie jest wymagane, by to odwzorowanie było tożsame względem zmiennej określającej czas.*

Trajektoria zaczynająca ewolucję w x_2 może być również kontynuowana do x_1 , a następnie wstecz od punktu x_3 przez taki sam czas, jaki jest wymagany, by dostać się z x_2 do x_1 . Powiedzmy, że czas ewolucji z x_2 do x_1 za pomocą potoku Φ_1 jest $\delta > 0$. Wtedy do ewolucji z x_3 używamy potoku Φ_1 z czasem ewolucji $-\delta$ aż osiągnięty zostanie punkt x_4 . Teraz możemy zdefiniować odwzorowanie z x_0 do x_4 .

Definicja 8 *Odwzorowanie przez nieciągłość tożsame względem zmiennej czasu t (ZDM) w pobliżu orbity typu grazing jest odwzorowaniem przez nieciągłość w otoczeniu punktu typu grazing, powiedzmy x^* , które jest tożsame względem zmiennej czasu. To znaczy, gdy to odwzorowanie jest złożone z odwzorowaniem wygenerowanym przez potok układu udarowego/przełączanego w celu zdefiniowania trajektorii dla układu z kontaktem typu grazing, czas ewolucji potoku jest taki sam, niezależnie czy kontakt typu grazing jest brany pod uwagę przy konstrukcji pełnego odwzorowania, czy nie.*

Warunek na tożsamość względem zmiennej czasu t pozwala, by odwzorowanie ZDM zostało w naturalny sposób wzięte pod uwagę jako składowa konstrukcji tzw. odwzorowania stroboskopowego o stałym czasie T - odwzorowania Poincarégo o stałym czasie $t = T$. Na przykład, dla cyklu granicznego z kontaktem typu *grazing* zawartego całkowicie w rejonie S_1 , odwzorowanie stroboskopowe można zapisać jako

$$P_S = P_2 \circ ZDM \circ P_1,$$

gdzie P_1 opisuje ewolucję potoku Φ_1 w czasie t_1 a P_2 opisuje ewolucję potoku Φ_1 w czasie $T - t_1$.

PDM może być wygodniejszym narzędziem analitycznym do analizowania zachowania cykli granicznych z kontaktem typu *grazing* w układach autonomicznych. Z drugiej strony, odwzorowanie ZDM jest wygodne do analizy orbit w układach nieautonomicznych z T -okresowym wzbudzeniem. Czynniki wiążące formy normalnej ZDM lub PDM dla przypadków ogólnych będzie miał taki sam wykładnik i formy te różnią się zasadniczo tym, że poprawka PDM nie jest tożsama względem zmiennej czasu.

By opisać zachowanie dynamiczne cykli granicznych (rozwiązań okresowych) charakteryzujących się kontaktem typu *grazing*, w dostatecznie małym otoczeniu krytycznego (tzn. charakteryzującego się kontaktem typu *grazing*) cyklu granicznego, odwzorowanie ZDM lub PDM należy złożyć z odwzorowaniem afinicznym, które opisuje zachowanie układu bez brania pod uwagę obecności zachowania typu *grazing*. Bez utraty ogólności możemy założyć, że orbita graniczna jest hiperboliczna jeżeli kontakt typu *grazing* nie jest brany pod uwagę. By uprościć prezentację wyników, w kolejnym paragrafie użyjemy zapisu operatorowego. W tym celu zostanie użyta pochodna Lie.

Definicja 9 Pochodna Liego jest pochodną całkowitą funkcji skalarnej h w kierunku potoku wygenerowanego przez pole wektorowe f . Jeżeli f i g są gładkimi polami wektorowymi, a h jest gładką funkcją skalarną wtedy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x), \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) &= \frac{\partial(\mathcal{L}_f h)}{\partial x} g(x), \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h(x) &= \frac{\partial(\mathcal{L}_f^{k-1} h)}{\partial x} g(x).\end{aligned}$$

Na przykład używając już wprowadzony zapis, piszemy

$$\mathcal{L}_f h(x) = h_x f(x)$$

oraz

$$\mathcal{L}_f^2 h(x) = (h_x f(x))_x f(x).$$

3 Opis wyników

3.1 Jedno- i dwu-parametryczne Bifurkacje Wywołane przez Nieciągłość (DIBs)

Główna część wyników będących przedmiotem habilitacji dotyczy zmian strukturalnych przestrzeni fazowej, które nazywamy *Bifurkacjami Wywołanymi przez Nieciągłość* (DIBs w skrócie z języka angielskiego). Cechą charakterystyczną DIBs jest brak transwersalności pomiędzy cyklem granicznym a rozmaitością przełączającą - czyli kontakt typu grazing dla pewnego punktu na orbicie - dla wartości parametru, dla którego zachodzi DIB.

Rozważmy układ Filippova o dwóch strefach. Załóżmy, że w układzie istnieje cykl graniczny, który jest w całości z w zbiorze S_1 bądź S_2 , lub też jest zbudowany z fragmentów wygenerowanych przez pola wektorowe F_1 , F_2 lub F_s . W tym drugim przypadku orbita graniczna zawiera punkty, w których orbita graniczna przełącza swoją ewolucję pomiędzy S_1 , S_2 i $\hat{\Sigma}$. Załóżmy, że punkty na orbicie granicznej, w których dochodzi do przełączenia pomiędzy zbiorami S_1 , S_2 lub $\hat{\Sigma}$ są funkcją parametru μ . Zmiany wartości parametru μ mogą spowodować, że punkt na cyklu granicznym, w których dochodzi do przełączenia pomiędzy zbiorami S_1 , S_2 lub $\hat{\Sigma}$ znajdzie się na jednej z granic $\partial\hat{\Sigma}^\pm$. Dalsza zmiana wartości parametru μ może spowodować, że punkt przełączania będzie wewnątrz $\hat{\Sigma}$ (lub na zewnątrz). Tego typu scenariusz jest jedno-parametrycznym zdarzeniem (zdarzeniem o ko-wymiarze 1). Rozważmy jakiś punkt x , taki w którym układ przełącza się pomiędzy dwoma polami wektorowymi. Nazwijmy potok, który w czasie dodatnim zbliża się do punktu, w którym dochodzi do przełączenia potoków, jako *potok zbliżający*, a potok, który generuje trajektorię po przełączeniu jako *potok oddalający*.

Definicja 10 Jeżeli w punkcie x , którekolwiek z dwóch pól wektorowych generujących potok zbliżający lub oddalający jest styczne do Σ , bądź $\partial\hat{\Sigma}^\pm$ gdy ewolucja segmentu zawierającego punkt styczny jest ograniczona do Σ , mówimy wtedy, że w punkcie x układ Filippova charakteryzuje się kontaktem typu grazing z rozmaitością przełączającą bądź z granicą rejonu, gdzie jest możliwa ewolucja sliding.

Definicja 11 Załóżmy, że w układzie Filippova (3) istnieje hiperboliczny zbiór graniczny $L(x, \mu)$, gdzie $\mu \in \mathbb{R}$ jest parametrem a x jest punktem na zbiorze granicznym L . Jeżeli dla jekiegoś μ^* w punkcie $x^* = x(\mu^*)$ zbiór graniczny L^* charakteryzuje się jednym izolowanym kontaktem typu grazing z granicą zbioru $\partial\hat{\Sigma}^-$ i zależność parametryczna zbioru względem μ dla x^* nie jest zdegenerowana, tzn. $\langle \frac{dx}{d\mu}, H_x \rangle(x^*, \mu^*) \neq 0$ i $\langle \frac{dx}{d\mu}, (H_x F_1)_x \rangle(x^*, \mu^*) \neq 0$, mówimy, że zbiór graniczny podlega jedno parametrycznej Bifurkacji Wywołanej przez Nieciągłość o typie sliding; \langle, \rangle oznacza iloczyn skalarny.

Należy zwrócić uwagę, że w przestrzeni fazowej iloczyn skalarny nie jest zdefiniowany, lecz teoria, którą tutaj prezentujemy jest lokalna, więc iloczyn skalarny rozważamy na przestrzeni stycznej. Ponadto w odniesieniu wszystkich definicji jedno- i dwu-parametrycznych bifurkacjach typu DIB, które

tutaj prezentuję, zakładamy że μ jest właściwie dobranym parametrem umożliwiającym rozwinięcie bifurkacji. Bez utraty ogólności, zakładamy, że dla lokalnych współrzędnych $x^* = 0$.

3.1.1 Formy normalne dla jedno-parametrycznych bifurkacji typu sliding

Zacniemy od warunków koniecznych, które definiują każdą z czterech jedno-parametrycznych bifurkacji typu sliding oraz od warunków zapewniających, że bifurkacja nie jest zdegenerowana. We wszystkich czterech przypadkach trajektoria, dla wartości parametru, przy której dochodzi do bifurkacji, charakteryzuje się punktem leżącym na zbiorze $\partial\hat{\Sigma}^-$, który jest granicą zbioru, na którym jest możliwa ewolucja typu sliding. Założymy, że tym punktem jest punkt $x = x^*(\mu^*)$ (gdzie μ jest parametrem bifurkacyjnym). Wtedy, dla wszystkich czterech przypadków mamy następujące warunki definiujące:

$$H(x^*) = 0, \quad H_x(x^*) \neq 0, \quad (12)$$

$$\alpha(x^*) = 0 \quad (\text{z czego wynika, że } F_s(x^*) = F_1(x^*) \text{ and } \mathcal{L}_{F_1}H(x^*) = 0). \quad (13)$$

Warunek pierwszy (12) zapewnia, że punkt x^* należy do rozmaitości przełączającej, która jest właściwie zdefiniowana; warunek drugi (13) zapewnia, że x^* leży na granicy rejonu, gdzie jest możliwa ewolucja sliding (bez utraty ogólności możemy założyć, że tą granicą jest zbiór $\partial\hat{\Sigma}^-$).

Spójrzmy teraz na warunki zapewniające że bifurkacja jest niezdegenerowana. Pierwszym z tych warunków jest warunek na to, że dla wszystkich punktów x w dostatecznie małym otoczeniu x^* pole wektorowe F_2 nie charakteryzuje się kontaktem typu grazing oraz, że wskazuje na rozmaitość Σ . To znaczy:

$$H_x F_d(x^*) > 0, \quad (14)$$

gdzie $F_d^* = F_2^* - F_1^*$. Musimy teraz rozważyć rodzaj styczności potoku sliding względem granicy $\partial\hat{\Sigma}^-$.

Przypadki *crossing-sliding* i *grazing-sliding* wymagają, by potok typu sliding był skierowany *do granicy* $\partial\hat{\Sigma}^-$ (zobacz Rys. 2). A więc wymagamy, by:

$$\left. \frac{\partial\alpha(\Phi_s(x^*, 0))}{\partial t} \right|_{t=0} < 0,$$

gdzie Φ_s jest operatorem potoku odpowiadającym potokowi wygenerowanemu przez pole wektorowe F_s . Jakkolwiek $F_s = F_1$ w x^* ze względu na (13), a więc $\Phi_s(x^*, 0) = \Phi_1(x^*, 0)$. Co więcej:

$$\frac{\partial\alpha(\Phi_1(x^*, 0))}{\partial t} = \alpha_x F_1(x^*) =: \mathcal{L}_{F_1}\alpha(x^*).$$

Z czego wynika, że $\mathcal{L}_{F_1}\alpha(x^*)$ określa czy granica $\partial\hat{\Sigma}^-$ jest atraktorem czy też repellerem względem potoku sliding. Crossing-sliding i grazing-sliding charakteryzują się więc warunkiem na niezdegenerowaną bifurkację w postaci:

$$\mathcal{L}_{F_1}\alpha(x^*) < 0, \quad (15)$$

podczas gdy switching-sliding (górnny rysunek na Rys. 3) charakteryzuje się więc warunkiem:

$$\mathcal{L}_{F_1}\alpha(x^*) > 0, \quad (16)$$

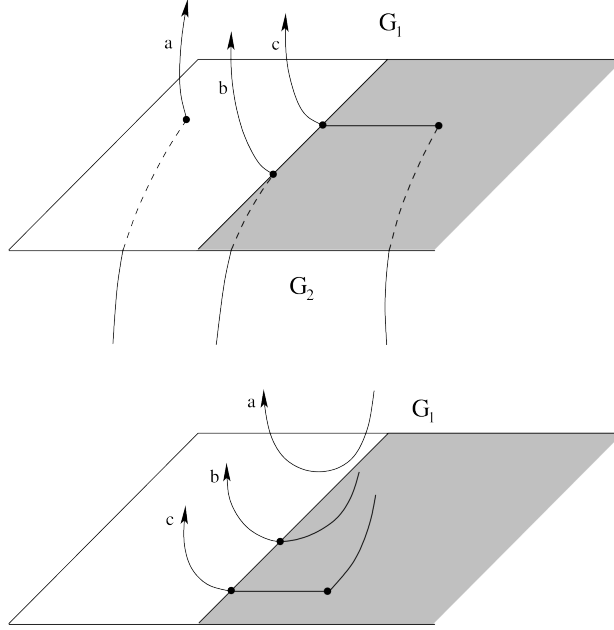
tak, że w tym przypadku potok sliding wskazuje *od* granicy rejonu sliding.

Adding-sliding (dolny przypadek na Rys. 3) jest bardziej subtelny. W tym przypadku mamy dodatkowy *warunek definiujący* taki, że mamy punkt styczny potoku sliding z $\partial\hat{\Sigma}^-$ na Σ w punkcie bifurkacyjnym na orbicie, która charakteryzuje się kontaktem typu grazing. Z czego wynika, że:

$$\mathcal{L}_{F_1}\alpha(x^*) = 0. \quad (17)$$

Co więcej, potok sliding musi osiągnąć lokalne minimum względem α na orbicie w punkcie kontaktu grazing. Więc dodatkowo wymagamy, by:

$$\frac{\partial^2\alpha(\Phi_s(x^*, 0))}{\partial^2 t} > 0,$$



Rysunek 2: Schematyczny rysunek bifurkacji crossing-sliding (góra) i grazing-sliding (dół).

czyli:

$$\mathcal{L}_{F_1}^2 \alpha(x) := \alpha_x F_{1x} F_1 + \alpha_{xx} F_1^2 > 0. \quad (18)$$

Możemy teraz zaprezentować następujące Twierdzenie na temat formy normalnej ZDM dla każdego przypadku bifurkacji sliding. ZDM opisuje poprawkę jaka musi być zastosowana do trajektorii dostatecznie bliskich trajektorii, która charakteryzuje się kontaktem typu grazing (zobacz Rys. 2 i 3) w celu wzięcia pod uwagę powstania dodatkowego segmentu trajektorii (lub utraty segmentu trajektorii) w zbiorze granicznym dla μ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* .

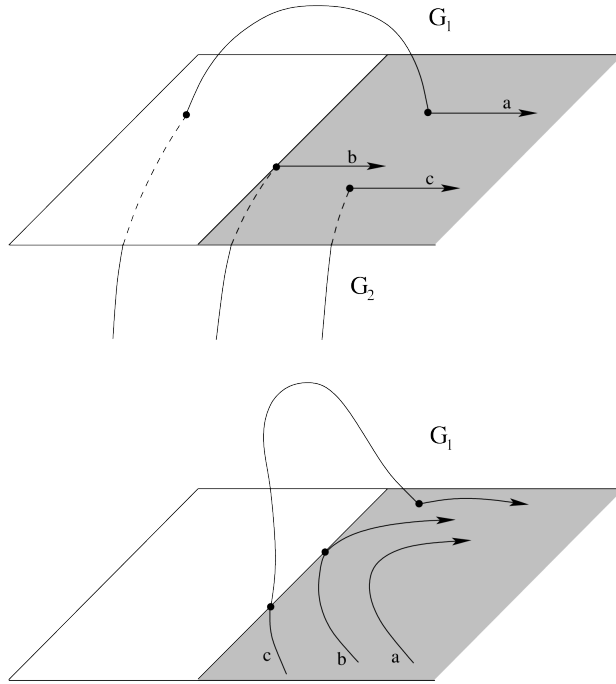
Twierdzenie 1 *Załóżmy, że układ kawałkami gładki wyrażony przez (3) przechodzi przez bifurkację typu sliding w punkcie x^* , zdefiniowaną przez warunki definiujące (12) i (13) oraz warunek (14). Wtedy cztery jedno-parametryczne bifurkacje typu sliding są scharakteryzowane przez następujące formy normalne ZDM:*

crossing-sliding; z warunkiem (15) zapewniającym niezdegenerowaną bifurkację ZDM dla trajektorii w dostatecznie małym otoczeniu punktu x^* może być wyrażona w postaci:

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{jeżeli } \mathcal{L}_{F_1} H(x) \leq 0, \\ x + (\mathcal{L}_{F_1} H(x))^2 \frac{F_2(x) - F_1(x)}{2\mathcal{L}_{F_2} H(x) \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x)} + O((x - x^*)^3) & \text{jeżeli } \mathcal{L}_{F_1} H(x) > 0; \end{cases} \quad (19)$$

grazing-sliding; z takim samym warunkiem (15) jak wyżej, zapewniającym niezdegenerowaną bifurkację ZDM dla trajektorii w dostatecznie małym otoczeniu punktu x^* może być wyrażona w postaci:

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{jeżeli } H(x) \geq 0, \\ x - \frac{H(x)(F_2(x) - F_1(x))}{\mathcal{L}_{F_2} H(x)} + O((x - x^*)^{3/2}) & \text{jeżeli } H(x) < 0; \end{cases} \quad (20)$$



Rysunek 3: Schematyczny rysunek bifurkacji switching-sliding (góra) i adding-sliding (dół).

switching-sliding; z dodatkowym warunkiem (16), zapewniającym niezdegenerowaną bifurkację ZDM dla trajektorii w dostatecznie małym otoczeniu punktu x^* może być wyrażona w postaci:

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{jeżeli } \mathcal{L}_{F_1}H(x) \leq 0, \\ x + \frac{2}{3} \frac{(\mathcal{L}_{F_1}H(x))^3}{(\mathcal{L}_{F_2}H(x))^2 (\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x))^2} Q + O((x - x^*)^4) & \text{jeżeli } \mathcal{L}_{F_1}H(x) > 0, \end{cases} \quad (21)$$

gdzie

$$Q = \mathcal{L}_{F_2}H(x)(F_{1x}F_d - F_{dx}F_1) - \mathcal{L}_{(F_{1x}F_d - F_{dx}F_1)}H(x)F_d,$$

oraz $F_d = F_2 - F_1$;

adding-sliding; z dodatkowym warunkiem definiującym (17) oraz z dodatkowym warunkiem (18), zapewniającym niezdegenerowaną bifurkację ZDM dla trajektorii w dostatecznie małym otoczeniu punktu x^* może być wyrażona w postaci:

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{jeżeli } \mathcal{L}_{F_1}H(x) \geq 0, \\ x - \frac{9}{2} \frac{(\mathcal{L}_{F_1}H(x))^2}{(\mathcal{L}_{F_2}H(x))^2 \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x)} Q + O((x - x^*)^{5/2}) & \text{jeżeli } \mathcal{L}_{F_1}H(x) < 0, \end{cases} \quad (22)$$

z Q zdefiniowanym powyżej.

Zachowanie dynamiczne układu Filippova w dostatecznie małym otoczeniu orbity granicznej, która podlega jedno-parametrycznej bifurkacji typu sliding może być zrozumiane badając zachowanie dynamiczne powiązanego kawałkami gładkiego odwzorowania ZDM. Rodzaj nieciągłości odpowiadającego odwzorowania PDM jest taki sam jak dla danego odwzorowania ZDM. Wyrażenia dla jedno-parametrycznych bifurkacji typu sliding dla odwzorowań PDM są przedstawione razem z dowodami w monografii [K4]. W dalszej zasadniczej części tego autoreferatu pokażę w jaki sposób można zastosować zaprezentowane formy normalne, by rozwinąć dwu-parametryczne bifurkacje typu sliding w układach Filippova. Pokażę również zastosowanie odwzorowań ZDM i PDM jako narzędzie do klasyfikacji zachowania dynamicznego układu Filippova w dostatecznie małym otoczeniu punktu bifurkacyjnego.

3.2 Dwu-parametryczne Bifurkacje Wywołane Nieciągłościami orbit granicznych

3.2.1 Klasyfikacja

W [K6] zaprezentowałem klasyfikację dwu-parametrycznych Bifurkacji Wywołane Nieciągłościami (DIBs) okresowych orbit granicznych w układach kawałkami gładkich. Dwu-parametryczne Bifurkacje typu DIB mogą należeć do jednej z następujących trzech kategorii:

Kategoria I **Zdegenerowane DIBs**; tzn. jeden z warunków, który określa zachowanie pola wektorowego względem rozmaitości przełączającej, definiujących bifurkację na granicy rejonu, gdzie ewolucja typu sliding jest możliwa nie jest spełniony przez co kontakt styczny typu grazing, pola wektorowego, jest zdegenerowany. Nie spełnienie warunku definiującego bifurkację może mieć wpływ na rząd czynnika wiodącego formy normalnej wyprowadzonej za pomocą odwzorowania przez nieciągłość.

Kategoria II **DIBs niehiperbolicznych cykli granicznych**, tzn. bifurkacje gdzie część liniowa kawałkami gładkiej formy normalnej opisującej zachowanie dynamiczne cyklu granicznego jest zdegenerowana; tzn. cykl graniczny nie jest hiperboliczny. Ten scenariusz można traktować jako równoczesne wystąpienie bifurkacji „gładkiej” i „nieciągłej” (typu DIB) dla tej samej wartości parametru;

Type III **Równoczesne niezależne wystąpienie dwóch jedno-parametrycznych bifurkacji typu DIB** w dwóch niezależnych punktach na cyklu granicznym podlegającym bifurkacji typu DIB.

3.2.2 Dwu-parametryczna zdegenerowana bifurkacja typu crossing-sliding. DIB Kategorii I

Jako pierwszy przypadek dwu-parametrycznej bifurkacji typu sliding przedstawię bifurkacje, które mogą wystąpić w przypadku, gdy warunek (15), lub (16) lub też (18) nie jest spełniony. Musimy więc wziąć pod uwagę dodatkową degenerację potoku oddalającego jako, że ten potok charakteryzuje się kontaktem typu grazing (kontaktem styczonym) w przypadku bifurkacji typu sliding. W przypadku, gdy potok przychodzący jest wygenerowany przez pole wektorowe F_1 lub F_s , potoki przychodzący i oddalający mają takie same właściwości względem Σ i $\partial\hat{\Sigma}$ w punkcie bifurkacyjnym. Wyniki, które tu prezentuję są przedstawione w [K3,K4].

Pierwszą z dwu-parametrycznych bifurkacji typu sliding, którą przedstawię jest tzw. zdegenerowana bifurkacja typu crossing-sliding. W tym przypadku zdegenerowanie potoku oddalającego Φ_1 ujawnia się jako dodatkowa styczność względem granicy rejonu gdzie ewolucja sliding jest możliwa. Co więcej zakrzywienie pola wektorowego musi być takie, by potok Φ_1 oddalał się od rozmaitości przełączającej. Oczywiście (12) i (13) muszą być spełnione również w tym wypadku. W ten sposób otrzymujemy następujące dodatkowe warunki analityczne, które muszą być spełnione w punkcie na cyklu granicznym, gdzie mamy zdegenerowany kontakt grazing.

Dodatkowa styczność potoku oddalającego jest wyrażona poprzez:

$$\left. \frac{\partial(\alpha(\Phi_1(x, t)))}{\partial t} \right|_{t=0} = \alpha_x F_1 = 0.$$

Wyrażając powyższy warunek przy użyciu H_x i F_1 otrzymujemy:

$$\left. \frac{\partial^2(H(\Phi_1(x, t)))}{\partial t^2} \right|_{t=0} = H_x F_{1x} F_1 = 0. \quad (23)$$

Warunek na brak degeneracji dla zdegenerowanej bifurkacji crossing-sliding Ze względu na to, że wymagamy by trajektoria opuszczała rozmaitość przełączającą pole wektorowe F_1 powinno osiągnąć minimum względem $\partial\hat{\Sigma}^-$. Tak więc warunek na brak degeneracji przyjmuje postać

$$\left. \frac{\partial^2(\alpha(\Phi_1(x, t)))}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \alpha_x F_{1x} F_1 < 0.$$

Wyrażając powyższy warunek poprzez H_x , F_1 otrzymujemy

$$\left. \frac{\partial^3(\alpha(H(\Phi_1(x, t)))}{\partial t^3} \right|_{t=0} = H_x(F_{1x})^2 F_1 > 0. \quad (24)$$

Definicja 12 Załóżmy, że w układzie Filippova (3) istnieje hiperboliczny cykl graniczny $L(x, \mu)$, gdzie $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ jest parametrem a x jest punktem na orbicie granicznej. Jeżeli dla jakiejś wartości μ^* orbita graniczna L^* w punkcie $x^* = x(\mu^*)$ charakteryzuje się pojedynczym, izolowanym, zdegenerowanym kontaktem stycznym (kontakt grazing) względem granicy rejonu, gdzie jest możliwa ewolucje sliding $\partial\hat{\Sigma}^-$ i zależność x^* względem parametru μ nie jest zdegenerowana, tzn. $\langle \frac{\partial x}{\partial \mu_i}, H_x \rangle(x^*, \mu^*) \neq 0$, $\langle \frac{\partial x}{\partial \mu_i}, (H_x F_1)_x \rangle(x^*, \mu^*) \neq 0$ for $i = 1, 2$ i $\frac{\partial x}{\partial \mu_1}(x^*, \mu^*)$ i $\frac{\partial x}{\partial \mu_2}(x^*, \mu^*)$ są liniowo niezależne, wtedy mówimy, że cykl graniczny podlega dwu-parametrycznej zdegenerowanej Bifurkacji Wywołanej przez Nieciągłość (DIB) typu sliding.

Twierdzenie 2 Zakładając, że układ Filippova (3) podlega dwu-parametrycznej zdegenerowanej bifurkacji typu crossing-sliding i spełnia warunki definiujące (12), (13), warunek na zdegenerowany kontakt stycznymi (23) oraz warunek (24) zapewniający, że rozważana dwu-parametryczna bifurkacja nie jest zdegenerowana, forma normalna opisująca bifurkację w dostatecznie małym otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa przyjmuje postać:

$$ZDM(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{for } V_{min} \geq 0, q_{min} \geq 0, \\ x - z^3 \frac{2}{\mathcal{L}_{F_d} H(x) \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x)} F_d + z^3 \mathcal{O}(z) & \text{for } V_{min} < 0, q_{min} \leq 0, \\ x - 3y^2 \frac{\mathcal{L}_{F_1}^2 H(x)}{\mathcal{L}_{F_1}^3 H(x) \mathcal{L}_{F_d} H(x)} F_d + y^2 \mathcal{O}(y) & \text{for } V_{min} > 0, q_{min} < 0, \end{cases} \quad (25)$$

gdzie

$$q(x, t) = \frac{H(\phi_1(x, t)) - H(x)}{t}$$

i

$$y^2 + q_{min} = 0;$$

q_{min} oznacza minimalną wartość funkcji q , którą ta funkcja osiąga wzdłuż potoku ϕ_1 po rozpoczęciu ewolucji w jakimś punkcie x . W naszym przypadku q jest małą wielkością. Zmienna z jest zdefiniowana poprzez relację

$$z^2 + V_{min} = 0,$$

gdzie $V_{min} = \mathcal{L}_{F_1} H(x)$ na

$$\{x \in \Sigma : \mathcal{L}_{F_g} \mathcal{L}_{F_1} H(x) = 0\}.$$

Wyjaśnimy teraz efekt otrzymanej formy normalnej na istnienie i stabilność krytycznego cyklu granicznego, który charakteryzuje się zdegenerowanym kontaktem stycznymi w punkcie $x^*(\mu^*)$. Interesuje nas istnienie i stabilność orbit granicznych $\forall(x, \mu)$ w dostatecznie małym otoczeniu $x^*(\mu^*)$. Oznaczmy przez

$$v = \mathcal{L}_{F_1} H(x), a = \mathcal{L}_{F_1}^2 H(x) \text{ and } c = \mathcal{L}_{F_1}^3 H(x),$$

gdzie v są a małymi wielkościami i $c = \mathcal{O}(1)$, $\forall(x, \mu)$ w dostatecznie małym otoczeniu punktu $x^*(\mu^*)$. Używam symbolu \mathcal{O} , by oznaczyć wszystkie czynniki wyższego rzędu, których efekt na zachowanie

układu może być pominięty w dostatecznie małym otoczeniu punktu bifurkacyjnego. W przypadku kilku zmiennych, gdy pojawiają się iloczyny małych wielkości, będą oznaczał rząd wiodącego pominiętego czynnika (oraz wszystkie czynniki wyższego rzędu) wykorzystując symbol $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Rozważmy Rys. 4. Na rysunku, T_0 odnosi się do tej części cyklu granicznego, który charakteryzuje się zdegenerowanym kontaktem stycznym z granicą $\partial\hat{\Sigma}^-$ rejonu sliding. Trajektorie, które rozpoczynają ewolucję na Σ , w dostatecznie małym otoczeniu x^* , na rejonie oznaczonym jako R_1 na rysunku, nie mają kontaktu z rejonem, gdzie jest możliwa ewolucja sliding (trajektorie T_1), a więc te trajektorie nie są korygowane przez ZDM. Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej zapewnia istnienie oraz stabilność orbity granicznej, która przecina rejon R_1 w dostatecznie małym otoczeniu zdegenerowanego cyklu granicznego.

Trajektorie, które przecinają rejon R_3 na rysunku (cf. T_3) podążają potokiem typu sliding przez jakiś mały czas, powiedzmy s , a następnie opuszczają powierzchnię przełączającą. Dla tych trajektorii czynnik korygujący odwzorowania ZDM jest $\mathcal{O}(z^3)$. Ze względu na fakt, że $z = \mathcal{O}(\sqrt{a})$ i $a = \mathcal{O}(\varepsilon)$ w R_2 z Twierdzenia of Funkcji Uwikłanej wynika, że w dostatecznie małym otoczeniu orbity granicznej podlegającej bifurkacji typu crossing-sliding dla μ dostatecznie bliskiego μ^* istnieje orbita graniczna przecinająca rejon R_3 ze stabilnością określoną przez stabilność zdegenerowanego cyklu granicznego.

Trajektorie przecinające rejon R_2 na rysunku (cf. T_2) najpierw podążają potokiem ϕ_1 w G_1 przez krótki czas, powiedzmy t , następnie po osiągnięciu rejonu typu sliding $\hat{\Sigma}$ podążają potokiem typu sliding przez jakiś czas s , by ostatecznie opuścić rozmaitość przełączającą. Ten rodzaj poprawki ZDM jest najbardziej subtelną poprawką. Pomimo tego, że w tym ostatnim przypadku poprawka ZDM jest rzędu liniowego, to jest ona ograniczona przez czynnik poprawki rzędu $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Jest to dokładnie wytłumaczone w [K5]. A więc z Twierdzenia of Funkcji Uwikłanej wynika, że w dostatecznie małym otoczeniu orbity podlegającej zdegenerowanej bifurkacji typu crossing-sliding istnieje orbita graniczna przecinająca rejon R_2 dla μ dostatecznie bliskiego μ^* , której stabilność jest taka sama jak orbity bifurkacyjnej dla $\mu = \mu^*$.

Analiza, którą tutaj przedstawiam została przeprowadzona w publikacji [K5] i zastosowana, by rozwinąć zachowanie dynamiczne modelu mechanicznego oscylatora harmonicznego z suchym tarciem, który charakteryzuje się dwu-parametryczną zdegenerowaną bifurkacją typu crossing-sliding. Analiza krzywych bifurkacyjnych modelu tego oscylatora była później przedstawiona również w [71] z uwzględnieniem dwu-parametrycznych bifurkacji sliding rozwiniętych przeze mnie w [K3,K4].

Rozwinięcie opisanych czterech zdegenerowanych dwu-parametrycznych bifurkacji orbit granicznych pozwala na rozwinięcie numerycznych technik kontynuacji tego typu zbiorów niezmienniczych w przestrzeni parametrycznej, co zostało poruszone w [K5].

3.2.3 Dwu-parametryczne bifurkacje typu DIB niehiperbolicznych cykli granicznych. DIB Typu II

Rozważmy teraz ogólny układ Filippova o dwóch strefach, taki że dla wartości parametru μ^* układ ma okresową orbitę graniczną o okresie $T^* > 0$ oraz $H > 0$ dla wszystkich punktów na orbicie granicznej z wyjątkiem punktu x^* gdzie występuje kontakt typu grazing.

Niech potok dla pola wektorowego F_1 będzie oznaczony jako $\phi_1(x, t, \mu)$, tzn.:

$$\phi_{1t}(x, t, \mu) = F_1(\phi_1(x, t, \mu), \mu), \quad (26)$$

$$\phi_1(x, 0, \mu) = x. \quad (27)$$

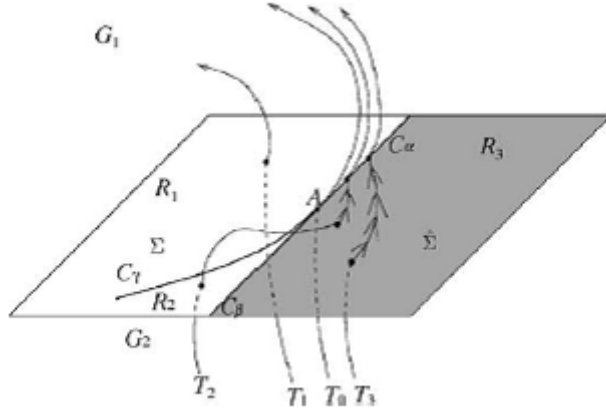
Z powyższego wynika, że:

$$\phi_1(x^*, T^*, \mu^*) = x^*, \quad (28)$$

$$H(x^*, \mu^*) = 0, \quad (29)$$

$$\mathcal{L}_{F_1}(H)(x^*, \mu^*) = 0, \quad (30)$$

$$\mathcal{L}_{F_1}^2(H)(x^*, \mu^*) > 0. \quad (31)$$



Rysunek 4: Topologia przestrzeni fazowej w otoczeniu zdegenerowanego punktu crossing-sliding o ko-wymiarze dwa (punkt oznaczony literą A na rysunku). Trajektoria oznaczona jako T_0 odnosi się do segmentu krytycznego cyklu granicznego, który wchodzi w kontakt z granicą zbioru typu sliding w dwu-parametrycznej zdegenerowanej bifurkacji crossing-sliding. Małe perturbacje parametryczne prowadzą do istnienia cyklu granicznego przecinającego rejony R_1 , R_2 lub R_3 . Jest to schematycznie pokazane przez trajektorie T_1 , T_2 i T_3 (przecinające odpowiednio R_1 , R_2 i R_3), które różnią się od T_0 ilości segmentów, które tworzą cykl graniczny.

Zdefiniujmy lokalne odwzorowanie rzutujące $P(x, \mu)$, które odwzorowuje stan x najkrótszą trajektorią pola wektorowego F_1 na powierzchnię zdefiniowaną poprzez zbiór $\mathcal{L}_{F_1}(H) = 0$. Możemy zbadać zachowanie układu w dostatecznie małym otoczeniu orbity charakteryzującej się punktem kontaktowym typu grazing za pomocą odwzorowania Poincarégo, w postaci:

$$PM(x, \mu) = \begin{cases} P(\phi_1(x, T^*, \mu), \mu) & \text{dla } H(P(\phi_1(x, T^*, \mu), \mu), \mu) \geq 0, \\ g(P(\phi_1(x, T^*, \mu), \mu), \mu) & \text{dla } H(P(\phi_1(x, T^*, \mu), \mu), \mu) \leq 0. \end{cases} \quad (32)$$

Dla trajektorii, które nie posiadają segmentu typu sliding, pierwsze wyrażenie jest regularnym odwzorowaniem Poincarégo. Dla trajektorii, które posiadają segment typu sliding drugie wyrażenie koryguje regularne odwzorowanie Poincarégo poprzez ZDM, którego forma algebraiczna jest wyrażona równaniem (20). Dla celu analizy zdefiniuję część odwzorowania ZDM, które ma czynnik uwzględniający poprawkę ze względu na istnienie segmentu sliding, w formie:

$$g(x, \mu) = x + \beta(x, \mu, y)y^2, \quad (33)$$

gdzie $y = \sqrt{-H(x, \mu)}$ i β , H są gładkimi funkcjami swoich argumentów. W takiej formie otrzymujemy dokładne wyrażenie na część nie będącą tożsamością dla odwzorowania ZDM. Czynniki wiodący $\beta(x, \mu, y)y^2$ rozwinięty względem zmiennej x wokół (x^*, μ^*) jest dokładnie wyrażeniem danym w równaniu (20).

Zauważmy, że drugie wyrażenie odwzorowania PM nie koniecznie odwzorowuje zbiór punktów na przekrój $\mathcal{L}_{F_1}(H) = 0$, więc PM nie jest odwzorowaniem Poincarégo na tym przekroju. Niemniej, odwzorowanie PM jest ekwiwalentnym względem jakiegokolwiek odwzorowania, które wykorzystuje przekrój nie przecinający punktów, w których trajektorie układu wchodzi w kontakt typu grazing z rozmaitością przełączającą, poprzez gładką zmianę współrzędnych.

Stabilność orbity granicznej dla kontaktu grazing Zauważmy, że cykl graniczny o okresie T^* dla parametru, dla którego zachodzi kontakt grazing, może być traktowana jako orbita graniczna nie posiadająca segmentu typu sliding lub jako orbita graniczna posiadająca segment sliding o zerowej

długości i okresie T^* . Jako, że każdy kontakt grazing może być potraktowany jako ewolucja sliding bądź jako ewolucja bez segmentu sliding, taka orbita graniczna może być więc rozważana jako orbita o okresie nT^* o m segmentach o zerowej długości ewolucji sliding w danej sekwencji kontaktu sliding/brak ewolucji sliding. W pierwszym przypadku (tzn. gdy nie brany jest pod uwagę segment sliding o zerowej długości) analiza stabilności orbity granicznej może być określona za pomocą równania wariacyjnego. W drugim wypadku, gdy brany jest pod uwagę segment typu sliding (o zerowej długości), do analizy stabilności należy wykorzystać równanie wariacyjne oraz odwzorowanie przez nieciągłość. Innymi słowy stabilność tych dwóch orbit granicznych może być określona poprzez rozważenie co się dzieje z cyklami granicznymi, gdy (w granicy przy zmianach parametru) dochodzi do kontaktu typu grazing z rozmaitością przełączającą i *de facto*, w granicy, otrzymujemy jedną orbitę graniczną. Rozważamy więc dwa procesy graniczne, które wykorzystujemy do określenia stabilności orbity granicznej charakteryzującej się, bądź też nie charakteryzującej się, segmentem o zerowej długości. Te dwie granice są określone, ale różne. (Proszę zauważyć, że rozważamy tylko stabilność tych orbit granicznych, lecz nie rozważamy stabilności orbity typu grazing, co jest bardziej złożonym problemem.)

By pokazać powyższe zachowanie, zauważmy że x^* jest ustalone poprzez ϕ_1 , P , i g . Jakobiany odwzorowań są wyrażone w postaci:

$$\phi_{1x}(x^*, T^*, \mu^*) = J^*, \quad (34)$$

$$P_x(x^*, \mu^*) = I - \frac{F^* V^*}{V^* F^*}, \quad (35)$$

$$g_x(x^*, \mu^*) = I - B^* C^*, \quad (36)$$

gdzie

$$F^* = F_1(x^*, \mu^*), \quad (37)$$

$$V^* = \mathcal{L}_{F_1}(H)_x(x^*, \mu^*), \quad (38)$$

$$B^* = \frac{F_d(x^*, \mu^*)}{\mathcal{L}_{F_d}(H)(x^*, \mu^*)}, \quad (39)$$

$$C^* = H_x(x^*, \mu^*). \quad (40)$$

Dla orbity granicznej bez segmentu sliding, stabilność liniowa jest wyrażona równaniem

$$A^* = (I - (F^* V^*) / (V^* F^*)) J^* \quad (41)$$

i określona poprzez wartości własne macierzy A^* (zauważ, że A^* charakteryzuje się trywialną wartością własną 0). Gdy postrzegamy orbitę graniczną jako orbitę z zerowym segmentem typu sliding stabilność liniowa jest określona przez wartości własne macierzy

$$A_s^* = (I - B^* C^*) A^*. \quad (42)$$

Jeżeli będziemy stosować kontynuację parametryczną orbit granicznych typu grazing w przestrzeni dwu-parametrycznej i będziemy mierzyć wielkość wartości własnych odpowiadających macierzy A^* i zaobserwujemy dla jakiejś wartości parametru, istnienie wartości własnej na okręgu o promieniu jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej, to mamy doczynienia z dwu-parametryczną bifurkacją typu grazing-sliding. Podobnie jeżeli będziemy mierzyć wielkość wartości własnych odpowiadających macierzy A_s^* i zaobserwujemy istnienie wartości własnej na okręgu o promieniu jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej mamy doczynienia z innym rodzajem dwu-parametrycznej bifurkacji typu grazing-sliding.

W [K7] rozwinąłem dwu-parametryczną bifurkację typu grazing-sliding w sytuacji, gdy jedna z wartości własnych macierzy A_s^* jest równa 1, ale żadna z wartości własnych macierzy A^* nie leży na okręgu o promieniu jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej

Istnienie cykli granicznych w punkcie o ko-wymiarze dwa Rozważmy najpierw istnienie gałęzi orbit nie zawierających segmentu typu sliding, które istnieją w otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa w przestrzeni dwu-parametrycznej. Wszystkie punkty na orbicie powracają do swojego punktu startowego, jeżeli scałkujemy pole wektorowe F_1 dla okresu czasu $t = \bar{T}$. Jako szczególny punkt na orbicie granicznej, wybierzemy punkt \bar{x} gdzie funkcja H osiąga minimum na orbicie. Wymagamy, by to minimum nie było ujemne, jeżeli ma odpowiadać rzeczywistej orbicie układu.

Równania dla punktu okresowego przyjmują postać:

$$\mathcal{L}_{F_1}(H)(\bar{x}, \mu) = 0, \quad (43)$$

$$\bar{x} - \phi_1(\bar{x}, \bar{T}, \mu) = 0. \quad (44)$$

W punkcie o ko-wymiarze dwa dla $\mu = \mu^*$, wiemy że $\bar{x} = x^*$, $\bar{T} = T^*$ jest rozwiązaniem i jeżeli macierz

$$L^* = \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ I - J^* & -F^* \end{pmatrix}, \quad (45)$$

gdzie

$$J^* = \phi_{1x}(x^*, T^*, \mu^*) \quad (46)$$

$$F^* = \phi_{1t}(x^*, T^*, \mu^*) = F_1(x^*, \mu^*) \quad (47)$$

$$V^* = \mathcal{L}_{F_1}(H)_x(x^*, \mu^*), \quad (48)$$

nie jest macierzą osobliwą wtedy Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej zapewnia istnienie jednoznacznych wartości $\bar{x}(\mu)$ i $\bar{T}(\mu)$ dla μ w otoczeniu μ^* . Wyznacznik tej macierzy jest równy:

$$\det(L^*) = V^* F^* \det(I - A^*), \quad (49)$$

gdzie

$$A^* = \left(I - \frac{F^* V^*}{V^* F^*}\right) J^*, \quad (50)$$

$$V^* F^* = \mathcal{L}_{F_1}^2(H)(x^*, \mu^*) > 0. \quad (51)$$

Jako, że założyliśmy, że orbita typu grazing, jeżeli jest postrzegana jako nie posiadająca segmentu typu sliding, nie posiada wartości własnej równej 1, więc L^* nie jest macierzą osobliwą. Definiując

$$\nu_0(\mu) = H(\bar{x}(\mu), \mu) \quad (52)$$

jest jasnym, że \bar{x} odpowiada istnieniu jednoznacznie określonej orbity granicznej nie posiadającej segmentu typu sliding o okresie jeden, wtedy i tylko wtedy gdy $\nu_0 > 0$. Niemniej funkcja $\bar{x}(\mu)$ jest gładka i określona $\forall \mu$ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* .

Zauważmy, że A i J mają takie same wektory własne i wartości własne, z wyjątkiem trywialnej wartości własnej równej jeden dla macierzy J , która staje się wartością własną równą 0 dla macierzy A .

Równania dla orbit granicznych z segmentem typu sliding, które pochodzą z orbity granicznej z kontaktem grazing mają postać:

$$\mathcal{L}_{F_1}(H)(x', \mu) = 0, \quad (53)$$

$$x' - \phi_1(x'', T'', \mu) = 0, \quad (54)$$

$$x'' - x' - \beta(x', \mu, y, 0)y^2 = 0, \quad (55)$$

$$y^2 + H(x', \mu) = 0. \quad (56)$$

Pomijając (56) i traktując y jako niezależną zmienną, otrzymujemy, że $x' = x'' = \bar{x}$, $T'' = \bar{T}$ jest rozwiązaniem dla $y = 0$ dla każdego μ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* i dla tych samych warunków, dla których istnieje orbita $\bar{x}(\mu)$ otrzymujemy, że $x'(\mu, y)$ jest dobrze określoną funkcją postaci:

$$x'(\mu, y) = \bar{x}(\mu) + [\bar{A}(I - \bar{A})^{-1} (\bar{B} + y\bar{B}_1) + \mathcal{O}(y^2)] y^2, \quad (57)$$

gdzie

$$\bar{A}(\mu) = \left(I - \frac{\bar{F}\bar{V}}{\bar{V}\bar{F}} \right) \bar{J}, \quad (58)$$

$$\bar{J}(\mu) = \phi_{1x}(\bar{x}(\mu), \bar{T}(\mu), \mu), \quad (59)$$

$$\bar{F}(\mu) = F_1(\bar{x}(\mu), \mu), \quad (60)$$

$$\bar{V}(\mu) = \mathcal{L}_{F_1}(H)_x(\bar{x}(\mu), \mu), \quad (61)$$

$$\bar{B}(\mu) = \beta(\bar{x}(\mu), \mu, 0, 0), \quad (62)$$

$$\bar{B}_1(\mu) = \beta_y(\bar{x}(\mu), \mu, 0, 0) \quad (63)$$

$$\bar{C}(\mu) = H_x(\bar{x}(\mu), \mu). \quad (64)$$

Po podstawieniu powyższych równań do (56) i rozwinięciu względem zmiennej y otrzymujemy:

$$\nu_0(\mu) + \nu_2(\mu)y^2 + y^3(\nu_3(\mu) + \mathcal{O}(y)) = 0, \quad (65)$$

$$y \geq 0, \quad (66)$$

gdzie

$$\nu_2(\mu) = 1 + \bar{C}\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{B}, \quad (67)$$

$$\nu_3(\mu) = \bar{C}\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{B}_1. \quad (68)$$

$$(69)$$

Zauważmy, że w punkcie μ^* o ko-wymiarze dwa $\nu_0(\mu^*) = \nu_2(\mu^*) = 0$. Założymy, bez utraty ogólności, że $\nu_3(\mu^*) \neq 0$. Założymy dalej, że zależność względem parametru μ nie jest zdegenerowana, tzn. $\nu_{0\mu}(\mu^*)$ i $\nu_{2\mu}(\mu^*)$ są liniowo niezależne.

Twierdzenie 3 *Niech $\mu = (\nu_0, \nu_2)$. Granice $\nu_0 \rightarrow 0$ i $y \rightarrow 0$ definiują gałąź jedno-parametrycznych bifurkacji typu grazing-sliding w przestrzeni dwu-parametrycznej $\forall \mu$ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* . Wokół μ^* istnieje krzywa bifurkacji typu fold zadana poprzez wyrażenie:*

$$\nu_0(\mu) = \nu_2(\mu)^3 \left(-\frac{4}{27\nu_3(\mu)^2} + \mathcal{O}(\nu_2) \right), \quad (70)$$

$$\frac{\nu_2(\mu)}{\nu_3(\mu)} < 0, \quad (71)$$

która jest jednostronnie, sześciennie styczna do krzywej bifurkacji grazing-sliding.

Zauważmy, że możemy porównać ν_0 dla orbity bez segmentu sliding z $-y^2$ dla orbity z segmentem sliding, ze względu na to, że obydwa parametry są miarą minimum funkcji H względem rozmaitości przełączającej wzdłuż trajektorii orbit granicznych, zastępując segment sliding odwzorowaniem ZDM. Nazywając tę wielkość jako H_{\min} otrzymujemy z (52) i (65), że

$$\frac{H_{\min}(\text{sliding})}{H_{\min}(\text{non sliding})} = \frac{1}{\nu_2} \quad (72)$$

w granicy dla $\nu_0 \rightarrow 0$ gdy $\nu_2 \neq 0$. Ze względu na fakt, że H_{\min} musi być dodatnie dla orbity bez segmentu sliding oraz ujemne dla orbity z segmentem sliding $\nu_2 > 0$ oznacza, że orbita graniczna bez segmentu sliding istnieje dla $\nu_0 > 0$ a z segmentem sliding dla $\nu_0 < 0$. Ujemna wartość parametru ν_2 oznacza, że obydwie orbity graniczne istnieją dla $\nu_0 > 0$ a żadna dla $\nu_0 < 0$.

Warunek na bifurkacje typu saddle-node dla orbit z segmentami ewolucji sliding jest taka, że równanie (65) powinno się charakteryzować podwójnym pierwiastkiem dla $y > 0$. To znaczy:

$$2\nu_2(\mu) + 3y(\nu_3(\mu) + \mathcal{O}(y)) = 0. \quad (73)$$

Eliminując y z (65) i (73) określa krzywą bifurkacji typu fold w przestrzeni dwu-parametrycznej.

Powyższe rozwinięcie zaprezentowałem w [K7], gdzie wykorzystałem to rozwinięcie, by wyjaśnić zachowanie dynamiczne oscylatora harmonicznego z nieciągłością, która była elementem modelu suchego tarcia. W [K7] pokazałem, po raz pierwszy w literaturze, przykład nowej bifurkacji w modelu mechanicznego oscylatora z suchym tarcie. Rozwinięcie analityczne pozwala na kontynuację numeryczną orbit granicznych w dwu-parametrycznej przestrzeni dla układów Filippova, co było również pokazane w [K7] przy użyciu wspomnianego oscylatora mechanicznego. Inne przypadki rozwinięć dwu-parametrycznych bifurkacji DIB typu II, dla orbit granicznych w układach z nieciągłościami są przedstawione, np. w [22, 59, 93].

3.2.4 DIB, Kategoria III

W tym paragrafie przedstawię trzecią kategorię dwu-parametrycznych bifurkacji sliding. W szczególności omówię przypadek przedstawiony i rozwinięty w [K5], gdzie orbita graniczna podlegająca dwu-parametrycznej bifurkacji charakteryzuje się równoczesnym wystąpieniem dwóch niezależnych jedno-parametrycznych bifurkacji typu sliding w dwóch punktach na orbicie granicznej.

Rozważmy orbitę graniczną w układzie Filippova (3), który dla jakiejś wartości parametru $\mu = \mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*) \in \mathbb{R}^2$ charakteryzuje się dwoma niezależnymi kontaktami typu grazing w punktach x_1^* i x_2^* , takich że $x_1^* \neq x_2^*$. Możemy teraz wprowadzić następującą definicję.

Definicja 13 *Załóżmy, że $L(x_1, x_2, \mu)$ jest orbitą graniczną w układzie Filippova (3), gdzie $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ jest parametrem i x_i ($i = 1, 2$) są punktami na orbicie granicznej takimi, że $x_1 \neq x_2$. Jeżeli dla jakiegoś μ^* orbita graniczna L^* w punktach $x_1^* = x_1(\mu^*)$ i $x_2^* = x_2(\mu^*)$ charakteryzuje się dwoma izolowanymi kontaktami typu grazing względem granicy rejonu $\partial\Sigma^-$ gdzie jest możliwa ewolucja sliding, i zależność x_i^* względem parametru μ nie jest zdegenerowana, tzn. $\langle \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1}, H_x \rangle(x_1^*, \mu^*) \neq 0$, $\langle \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1}, (H_x F_1)_x \rangle(x_1^*, \mu^*) \neq 0$, $\langle \frac{\partial x_2}{\partial \mu_2}, H_x \rangle(x_2^*, \mu^*) \neq 0$, $\langle \frac{\partial x_2}{\partial \mu_2}, (H_x F_1)_x \rangle(x_2^*, \mu^*) \neq 0$, i $\frac{\partial x}{\partial \mu_1}(x^*, \mu^*)$ oraz $\frac{\partial x}{\partial \mu_2}(x^*, \mu^*)$ są liniowo niezależne, mówimy, że orbita graniczna podlega dwu-parametrycznej bifurkacji DIB z dwoma równoczesnymi niezależnymi jedno-parametrycznymi bifurkacjami typu sliding.*

By opisać zachowanie układu $\forall \mu$ w dostatecznie małym otoczeniu parametru μ^* , można wykorzystać ZDMs/PDMs dla jedno-parametrycznych bifurkacji typu sliding. Załóżmy, że dwu-parametryczna bifurkacja, którą rozważamy, polega na równoczesnej obecności jedno-parametrycznych bifurkacji typu grazing-sliding i adding-sliding (ten przypadek jest rozwinięty w [K5]). Jako przekrój Poincarégo, powiedzmy Π , wybierzmy przekrój, który jest poprzeczny względem pola wektorowego, które generuje krytyczną orbitę. Wybieramy przekrój Π w taki sposób, by był poprzeczny względem orbity granicznej w jednym z dwóch punktów x_i^* ($i = 1, 2$), gdzie ma miejsce kontakt typu grazing.

Zdefiniujmy Π , $\forall x$, w dostatecznie małym otoczeniu punktu x_1^* jako zbiór na stałej poziomicy $H_x F_1(x, \mu) = 0$, gdzie zakładamy, że x_1^* jest punktem, gdzie dochodzi do kontaktu typu grazing, dla jedno-parametrycznej bifurkacji typu grazing-sliding.

Załóżmy, że $\bar{x} \in \Pi$ jest punktem okresowym dla orbity granicznej, która istnieje w dostatecznie małym otoczeniu punktu okresowego x_1^* odpowiadającej krytycznej orbicie granicznej. Wtedy \bar{x} spełnia równanie

$$\bar{x} = f_2 \circ as \circ f_1 \circ gs(\bar{x}, \mu), \quad (74)$$

gdzie $gs(x, \mu)$ i $as(x, \mu)$ są beczasowymi odwzorowaniami przez nieciągłość odpowiednio dla bifurkacji GS i AS (zobacz równanie eqs. (20) i (22)), podczas gdy f_1 i f_2 są pewnymi gładkimi odwzorowaniami, które opisują zachowanie układu pomiędzy punktami, gdzie mam miejsce kontakt typu grazing pomiędzy cyklem granicznym a granicą $\partial\Sigma^\pm$, która jest granicą dla rejonu gdzie jest możliwa ewolucja sliding. Wpływ korekcji odwzorowania ZDM dla bifurkacji AS jest zawarty w czynnikach wyższego rzędu, więc $f_T = f_2 \circ as \circ f_1$ jest C^1 różniczkowalnym odwzorowaniem klasy C^1 . Z drugiej strony gs jest kawałkami linowe. Z tego wynika, że dla dostatecznie małego otoczenia orbity krytycznej to właśnie

odwzorowanie gs będzie krytyczne dla zachowania dynamicznego układu w otoczeniu orbity krytycznej. Orbita krytyczna musi spełnić warunki dla bifurkacji jedno-parametrycznych grazing-sliding i adding-sliding, odpowiednio, w punktach x_1^* i x_2^* .

Istnienie cykli granicznych w otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa Możemy teraz wziąć pod uwagę jakiego typu cykle graniczne istniejące w otoczeniu granicznego cyklu krytycznego i określić gałęzie bifurkacji w przestrzeni dwu-parametrycznej istniejące w otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa. Podobnie jak wcześniej, orbita charakteryzująca się jedno-parametryczną bifurkacją typu grazing-sliding może być traktowana jako zawierająca, bądź też nie zawierająca segmentu sliding o zerowej długości. Możemy założyć bez utraty ogólności, że mnożniki Floqueta dla orbity krytycznej nie leżą na okręgu o promieniu jeden na płaszczyźnie zespolonej, niezależnie od tego czy rozpatrujemy orbitę krytyczną jako posiadającą lub nie posiadającą segmentu sliding o zerowej długości. Pod warunkiem tego założenia, ciągła zmiana parametru prowadzi do powstania orbit granicznych z oraz bez „krótkiego” segmentu ewolucji typu sliding. Rozważmy najpierw istnienie rodziny cykli granicznych, które nie posiadają segmentu typu sliding. Bez utraty ogólności zakładamy, że punkt okresowy dla tych cykli $\bar{x} \in \Pi$ jest taki, że $H(\bar{x}, \mu) > 0$.

Równania dla punktu okresowego spełniają:

$$H_x F_1(\bar{x}, \mu) = 0, \quad (75)$$

$$\bar{x} - f_T(\bar{x}, \mu) = 0. \quad (76)$$

Zauważmy, że dla cykli granicznych, które nie charakteryzują się segmentem typu sliding odwzorowanie gs jest tożsame. Jeżeli w punkcie o ko-wymiarze dwa $(\bar{x}, \mu) = (x^*, \mu^*)$ jest rozwiązaniem (75) i (76), i macierz

$$L^* = \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ I - J^* & -F^* \end{pmatrix} \quad (77)$$

nie jest osobliwa, z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej otrzymujemy, że $\bar{x}(\mu)$ jest zdefiniowane w sposób jednoznaczny dla każdego μ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* . Wyznacznik macierzy L^* nie jest osobliwy jeżeli f_{T_x} nie posiada mnożników Floqueta na okręgu o promieniu jednostkowym (co jest naszym założeniem). Zdefiniujmy $\nu_0(\mu) = H(\bar{x}(\mu), \mu)$. Z definicji $\nu_0 > 0$ odpowiada jednoznacznemu cyklowi granicznemu istniejącemu w dostatecznie małym otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa, który nie posiada segmentu typu sliding.

By otrzymać równania dla gałęzi cykli granicznych o okresie jeden (tzn. charakteryzujących się jedną iteracją odwzorowania $f_T \circ gs$) istniejącej w otoczeniu orbity krytycznej, należy wziąć pod uwagę wpływ odwzorowania $gs(x, \mu)$. Dzięki temu otrzymamy dwa dodatkowe równania i równania dla cykli granicznych z segmentem sliding są dane w postaci:

$$H_x F_1(x', \mu) = 0, \quad (78)$$

$$x' - f_T(x'', \mu) = 0, \quad (79)$$

$$x'' - b(x', \mu, y)y^2 = 0, \quad (80)$$

$$y^2 + H(x', \mu) = 0, \quad (81)$$

gdzie b oznacza czynnik wszystkich rzędów dla poprawki wynikającej z bezczasowego odwzorowania przez nieciągłość (20). Z (78)–(81) i dla tych samych warunków, dla których otrzymaliśmy warunek na istnienie $\bar{x}(\mu)$, otrzymujemy, że $x' = x'' = \bar{x}$ jest rozwiązaniem dla $y = 0$, dla każdej wartości parametru μ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* . Z linearyzacji (78)–(80), otrzymujemy, że:

$$x'(\mu, y) = \bar{x}(\mu) + \bar{A}(I - \bar{A})^{-1} \bar{B}y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad (82)$$

gdzie

$$\bar{A}(\mu) = \left(I - \frac{\bar{F}\bar{P}}{\bar{P}\bar{F}} \right) (f_T)_x, \quad \bar{B} = b(\bar{x}(\mu), \mu, 0), \quad \bar{C}(\mu) = H_x(\bar{x}(\mu), \mu).$$

Zauważmy, że czynnikiem wiodącym odwzorowania ZDM (zobacz równanie (20)) jest \bar{B} . Rozwijając (81) in y ostatecznie otrzymujemy:

$$\nu_0(\mu) + \nu_2(\mu)y^2 + \mathcal{O}(y^3) = 0, \quad (83)$$

gdzie $\nu_2 = 1 + \bar{C}\bar{A}(I - \bar{A})^{-1}\bar{B}$.

Gałęzie bifurkacji grazing-sliding i adding-sliding Możemy traktować ν_0 i ν_2 jako parametry umożliwiające rozwinięcie bifurkacji w otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa w celu określenia charakteru krzywych odpowiadających bifurkacjom adding-sliding i grazing-sliding w przestrzeni dwu-parametrycznej ν_0 i ν_2 .

Twierdzenie 4 *Niech $\mu = (\nu_0, \nu_2)$. Granice $\nu_0 \rightarrow 0$ i $y \rightarrow 0$ określają gałęzie bifurkacji typu grazing-sliding w przestrzeni dwu-parametrycznej $\forall \mu$ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* . Jeżeli $\nu_2 > 0$ wtedy gałąź bifurkacji adding-sliding, istniejąca $\forall \mu$ w dostatecznie małym otoczeniu μ^* , przecina gałąź bifurkacji typu grazing-sliding w punkcie μ^* . Z drugiej strony, jeżeli $\nu_2 < 0$, dwie gałęzie bifurkacji, odpowiadające bifurkacjom typu adding-sliding odchodzą z punktu o ko-wymiarze dwa i leżą po tej samej stronie względem krzywej grazing-sliding w przestrzeni dwu-parametrycznej. W drugim przypadku cykle graniczne istniejące w dostatecznie małym otoczeniu (x^*, μ^*) muszą być niestabilne.*

Wyniki zawarte w Twierdzeniu 4 są szczegółowo wyjaśnione w [K2,K4]. Poniżej wyjaśniamy najistotniejsze elementy Twierdzenia 4. Grazing-sliding ma miejsce dla $\nu_0 \rightarrow 0$, dla cykli bez krótkiego segmentu typu sliding, lub dla $y \rightarrow 0$, dla cykli z krótkim segmentem typu sliding. Obydwie z tych granic odpowiadają tej samej gałęzi bifurkacji grazing-sliding (GS) w przestrzeni dwu-parametrycznej. Z dyskusji powyżej wynika, że przynajmniej dwa cykle graniczne powstają z granicznego cyklu krytycznego. Z tego względu, że obydwa wspomniane cykle graniczne, w punkcie o ko-wymiarze dwa charakteryzują się kontaktem typu adding-sliding, wykorzystując ciągłość względem parametru i stanu, te cykle graniczne muszą charakteryzować się kontaktem typu grazing dla bifurkacji adding-sliding (AS) dla ν_0 i ν_2 w dostatecznie małym otoczeniu $\nu_0 = 0$ i $\nu_2 = \nu_2^*$, gdzie ‘*’ oznacza wartość parametru ν_2 w punkcie o ko-wymiarze dwa.

Jeżeli obydwa cykle graniczne istnieją po tej samej stronie względem gałęzi grazing-sliding w przestrzeni dwu-parametrycznej, to wtedy gałęzie odpowiadające bifurkacjom adding-sliding (AS) kończą się w punkcie o ko-wymiarze dwa. Z drugiej strony jeżeli dwa cykle graniczne istnieją, każdy po przeciwnej stronie krzywej bifurkacyjnej GS, to odpowiadające im krzywe bifurkacyjne AS, które odchodzą od punktu o ko-wymiarze dwa, leżą po przeciwnych stronach krzywej bifurkacyjnej. W obydwu przypadkach, jeżeli kontynuujemy krzywą bifurkacyjną AS w punkcie krytycznym o ko-wymiarze dwa krzywa AS charakteryzuje się nieróżniczkowalną osobliwością i możemy powiedzieć, że w tym punkcie jedna gałąź bifurkacji AS się kończy i zaczyna się druga gałąź bifurkacji AS, na którą można przejść w sposób ciągły.

Z równania (83) otrzymujemy, że jeżeli $\nu_2 > 0$ to wtedy ν_0 musi być ujemne dla cykli granicznych z krótkim segmentem typu sliding (zauważmy, że cykle graniczne bez krótkiego segmentu sliding, z definicji, mogą istnieć tylko dla dodatnich wartości parametru ν_0). Z czego wynika, że krzywe bifurkacji adding-sliding muszą leżeć po przeciwnych stronach względem krzywej bifurkacyjnej GS w przestrzeni dwu-parametrycznej. Z drugiej strony, jeżeli $\nu_2 < 0$ wtedy ν_0 musi być dodatnie dla cyklu granicznego z krótkim segmentem typu sliding, więc cykle graniczne, które rozgałęziają się z gałęzi bifurkacji grazing, muszą leżeć po jednej stronie krzywej GS w przestrzeni dwu-parametrycznej. Co więcej, możemy również pokazać, że dla $\nu_2 < 0$ przynajmniej jedna z dwóch orbit które eamnują z punktu o ko-wymiarze dwa musi być niestabilna.

Możemy dalej określić zachowanie dynamiczne cykli granicznych wokół punktu o ko-wymiarze dwa jeżeli zbadamy wartości własne (mnożniki Floqueta) dla macierzy A^* oraz $(I - B^*C^*)A^*$. Jeżeli wszystkie nie trywialne mnożniki Floqueta dla tych macierzy leżą wewnątrz okręgu o promieniu jeden na płaszczyźnie zespolonej to wtedy obydwa cykle graniczne są stabilne dla wszystkich wartości ν_0 i ν_2 w dostatecznie małym otoczeniu $\nu_0 = 0$ i ν_2^* , co odpowiada przypadkowi odkrytemu i rozwiniętemu

w oscylatorze harmonicznym z suchym tarciem analizowanym w [K5] jako prezentacja przykładu praktycznego zastosowania rozwijanej teorii.

3.2.5 Dyskusja i klasyfikacja rozwinięć dwu-parametrycznych DIBs

Na podstawie wyników i dyskusji zaprezentowanej w rozdziale 3.2 możemy wnioskować, że klasyfikacja i rozwijanie dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB cykli granicznych w układach kawałkami gładkich pozwala określić istnienie gałęzi bifurkacji typu DIB, które emanują z punktów o ko-wymiarze dwa w przestrzeni dwu-parametrycznej. Klasyfikacja zachowań dynamicznych jest pozwiązana z zachowaniem cykli granicznych w przypadku przekraczania krzywych bifurkacyjnych pod wpływem zmian wartości parametrów. Należy podkreślić dwa czynniki. Po pierwsze, nie istnieje teoria, która pozwalałaby na określenie istnienia wszystkich krzywych bifurkacyjnych, które mogą emanować w szczególnym przypadku bifurkacji dwu-parametrycznej z punktu o ko-wymiarze dwa dla ogólnych n -wymiarowych układów kawałkami gładkich (układów PWS).

Po drugie, klasyfikacja zachowań dynamicznych będzie zależna od wymiaru układu. Tzn. rozwinięcia, które są przedstawione mogą być stosowane w przypadku ogólnych układów n -wymiarowych typu Filippova, lecz dokładne zachowanie dynamiczne będzie zależne od wymiaru przestrzeni fazowej układu (ze względu na fakt, że w układach kawałkami gładkich nie istnieje rozmaitość centralna). Co więcej, należy zwrócić uwagę, że w przypadku układów, które są stosowane przez inżynierów zadane warunki ogólne często nie są spełnione w wyniku istnienia np. naturalnych symetrii. Strategia klasyfikacyjna i metodologia porzedstawiona w habilitacji, pomimo tego, że jest stosowana do układów Filippova, może być również stosowana dla innych klas układów kawałkami gładkich. Rozwinięcia dla innych przypadków dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB są przedstawione np. w [90, 88, 44, 53].

Przedstawię teraz wyniki rozwinięcia numerycznego, przedstawionego w [K6], dla przykładu oscylatora harmonicznego z udarem, w którym występuje dwu-parametryczna bifurkacja typu DIB należąca do kategorii II. Tak więc, będę brał pod uwagę układ o stopniu nieciągłości 0.

Przykład: oscylatora z wymuszeniem i udarem Rozważmy model oscylatora z wymuszeniem okresowym i udarem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v, \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{w^2}x_1 - \frac{2d}{w}x_2 + a \left(\left[\frac{1}{w^2} - 1 \right] \cos(x_3) - \frac{2d}{w} \sin(x_3) \right), \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases} \quad (84)$$

z udarem dla $x_1 = -1$, gdzie prawo udarowe ma postać

$$x_2^+ = -rx_2^-. \quad (85)$$

Zmienna x_1 oznacza położenia, x_2 to prędkość a $x_3(\text{mod}2\pi)$ oznacza fazę, d jest bezwymiarowym tłumieniem, w oznacza częstotliwość wymuszającą podzieloną przez naturalną częstotliwość wzbudzenia układu, r jest współczynnikiem restytucji a a oznacza amplitudę rozwiązania szczególnego. Dla $0 < a < 1$ układ charakteryzuje się bezudarowymi cyklami granicznymi, które można wrazić w postaci jawnej jako:

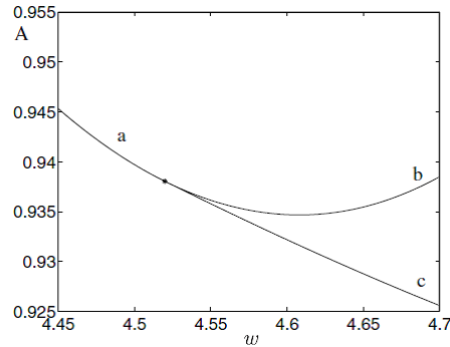
$$x_1 = a \cos(x_3), \quad (86)$$

$$x_2 = -a \sin(x_3) \quad (87)$$

i rozwiązanie jest stabilne dla $d > 0$ i $w > 0$. Poza tym rozwiązaniem układ może posiadać dodatkowe cykle graniczne z udarem, bądź też atraktory chaotyczne.

Nie-hiperboliczne rozwiązania z kontaktem grazing ($\lambda = 1$) Dla wartości parametrów

$$d = 0.6, \quad w = 4.519798, \quad a = 0.938042, \quad r = 1$$



Rysunek 5: Dwu parametryczny diagram bifurkacyjny w otoczeniu punktu o ko-wymiarze dwa, dla którego krytyczny cykl graniczny podlegający bifurkacji typu DIB ma nietrywialny mnożnik Floqueta o wartości $\lambda = 1$ (oznaczenie przez gwiazdki). Krzywa okresowych orbit granicznych z kontaktem udarowym typu grazing z $\lambda < 1$ dla „a” i $\lambda > 1$ dla „b”. Krzywa charakteryzująca się mnożnikiem Floqueta $\lambda = 1$ dla okresowych orbit granicznych bez kontaktu udarowego typu grazing dla „c”.

w układzie istnieje okresowa orbita graniczna charakteryzująca się jednym udarowym kontaktem typu grazing i jednym udarem transwersalnym. Co więcej, ta orbita charakteryzuje się istnieniem nietrywialnego mnożnika Floqueta o wartości $\lambda = 1$ (dla linearyzowanego układu ignorując udar z kontaktem typu grazing). Drugi mnożnik Floqueta jest dodatni i blisko wartości zerowej. Wartość numeryczna wybranego punktu okresowego na orbicie granicznej jest równa

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0.315637, 2.787732).$$

Okres orbity granicznej jest równy 8π .

Na diagramie bifurkacyjnym w i a są wielkościami, które są zmieniane (Rysunek 5). Z przeprowadzonej analizy numerycznej wynika, że w punkcie o ko-wymiarze dwa spotyka się kilka krzywych odpowiadających jednoparametrycznym bifurkacjom. W szczególności, otrzymaliśmy krzywą bifurkacyjną odpowiadającą okresowym orbitom granicznym podlegającym bifurkacji typu grazing oraz krzywą odpowiadającą bifurkacji „saddle-node”. W analizowanym numerycznie układzie istnieje również stabilna graniczna orbita okresowa podobna do dwu-parametrycznej orbity istniejącej w przestrzeni parametrycznej pomiędzy krzywymi „b” i „c”. Dla wartości parametrów na „c” podlega bifurkacji prowadzącej do atryktora chaotycznego podobnego do orbity istniejącej dla małego rejonu powyżej krzywej „b”. Dalsza zmiana parameteru a prowadzi do kolejnej krytycznej bifurkacji (której analiza nie jest przedmiotem habilitacji i krzywa, na której dochodzi do tej bifurkacji nie jest przedstawione na diagramie bifurkacyjnym) powodującej anihilację atryktora. Poniżej krzywej „c” oraz poniżej i powyżej krzywej „a” nie istnieje atryktor w otoczeniu krytycznego punktu o ko-wymiarze dwa.

Nie-hiperboliczne rozwiązanie podlegające bifurkacji grazing ($\lambda = -1$) Dla wartości parametrów:

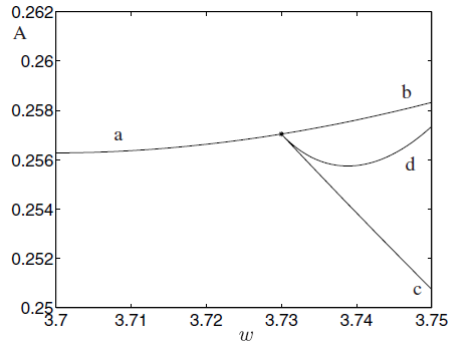
$$d = -0.3, w = 3.729986, a = 0.257040, r = 0.15$$

istnieje okresowa orbita graniczna charakteryzująca się jednym kontaktem udarowym oraz jednym kontaktem typu grazing w jednym okresie. Orbita graniczna charakteryzuje się również mnożnikiem Floqueta $\lambda = -1$, dla linearyzowanego układu ignorując kontakt typu grazing. Drugi nietrywialny mnożnik Floqueta ma wartość -0.47 a okres orbity jest równy 6π .

Okresowy punkt na orbicie jest równy

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0.170869, 5.186351).$$

Na dwu-parametrycznym diagramie bifurkacyjnym o parametrach w i a (Rysunek 6)



Rysunek 6: Diagram bifurkacyjny w otoczeniu punktu (gwiazdka) bifurkacyjnego typu grazing z mnożnikiem Floqueta $\lambda = -1$. Krzywa orbit granicznych podlegających bifurkacji grazing dla $\lambda > -1$ lub zespolona oznaczona przez literę „a” i $\lambda < -1$ na krzywej „b”. Krzywa „c” z $\lambda = -1$ określa graniczne orbity okresowe bez uderów o małej wartości zmiennej prędkości - uder „near-grazing”. Krzywa „d” jest krzywą cykli granicznych z kontaktem grazing i o podwójnym okresie względem granicznego cyklu krytycznego.

prezentujemy kilka krzywych jedno-parametrycznych, które spotykają się w punkcie o ko-wymiarze dwa. Jedną z tych krzywych jest krzywa orbit okresowych dla bifurkacji typu grazing kolejną to krzywa bifurkacji „period-doubling”. W układzie istnieje stabilna orbita okresowa, o takim charakterze jak orbita krytyczna, w rejonie pomiędzy krzywymi „a” i „c”. Na „c” zachodzi superkrytyczna bifurkacja „period-doubling”, z której powstaje stabilna orbita o podwójnym okresie. Na „d” ta orbita podlega bifurkacji typu grazing. Stabilność tej orbity zmienia się w sposób drastyczny wzdłuż krzywej „d”. W pobliżu punktu o ko-wymiarze dwa jeden z mnożników Floqueta musi być blisko wartości -1 , lecz po prawej stronie diagramu bifurkacyjnego mnożniki Floqueta są już zespolone. Do podobnej zmiany zachodzi na krzywej „a”. W analizowanym numerycznie układzie, w wyniku bifurkacji typu grazing po przekroczeniu krzywej „d” nie dochodzi do powstania atraktora.

Wyniki numeryczne, które zaprezentowałem, mogą być wygenerowane w sposób zautomatyzowany dzięki rozwinięciu analitycznemu, które pozwala zdefiniować warunki na istnienie określonych jedno-parametrycznych krzywych bifurkacyjnych w otoczeniu punktu krytycznego o ko-wymiarze dwa. Rozwinięcie wydajnych metod numerycznych pozwalających na kontynuację bifurkacji DIB w przestrzeni parametrycznej dla różnych kategorii układów kawałkami gładkimi stanowi przedmiot aktualnych badań naukowych. Rozwinięte metody numeryczne do kontynuacji bifurkacji DIB są opisane np. w [30, 27].

3.3 Powstanie mnogości atraktorów dla bifurkacji grazing-sliding. Problemy klasyfikacyjne

W rozdziale 3.2 zaprezentowałem metodologię będącą narzędziem umożliwiającym rozwijanie dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB. W szczególności pokazałem rozwinięcie analityczne dla każdego z trzech różnych kategorii dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB. Niemniej, należy zwrócić uwagę, że dla bifurkacji DIB, w zależności od wymiaru przestrzeni fazowej może dojść do różnych zachowań dynamicznych. W bieżącym akapicie zaprezentuję wyniki klasyfikacji dla zachowania dynamicznego układu Filippova o trójwymiarowej przestrzeni fazowej, w którym w wyniku jedno-parametrycznej bifurkacji typu grazing-sliding dochodzi do powstania wielu atraktorów z jednego atraktora. Tego typu bifurkacja nie może mieć miejsca w układach z różniczkowalnym polem wektorowym. Tego typu zachowanie w układach kawałkami gładkimi zostało pokazano dla kawałkami gładkimi odwzorowań, np. w [38] a multi-stabilność w różnego typu układach kawałkami gładkimi w [100].

Rozważmy układ Filippova, dla którego ewolucja zmiennej x w pewnym rejonie $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ jest

określona przez układ równań:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} F_1(x(t), \mu) & \text{dla } H(x(t), \mu) > 0, \\ F_2(x(t), \mu) & \text{dla } H(x(t), \mu) < 0, \end{cases} \quad (88)$$

gdzie F_1, F_2 są wystarczająco gładkimi funkcjami wektorowymi $F_1, F_2 : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ i $H : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest pewną gładką funkcją skalarną.

Zdefiniujmy granicę Σ jako:

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{D} : H(x, \mu) = 0\}. \quad (89)$$

Rejon \mathbb{D} jest podzielony przez zbiór Σ na dwa podzbiory. To znaczy zdefiniujemy:

$$S_1 := \{x \in \mathbb{D} : H(x, \mu) > 0\},$$

i

$$S_2 := \{x \in \mathbb{D} : H(x, \mu) < 0\},$$

gdzie ewolucja układu jest generowana - odpowiednio - przez różniczkowalne pola wektorowe F_1 i F_2 . Pomimo tego, że F_1 i F_2 generują trajektorie - odpowiednio - tylko w S_1 i S_2 , obydwa pola wektorowe są określone na całym rejonie \mathbb{D} . W zależności od kierunku jaki przyjmują te pola wektorowe względem powierzchni Σ trajektorie rozpoczynające ewolucję w S_1 lub S_2 , które osiągną Σ w skończonym czasie muszą przekroczyć Σ lub będą podlegały ewolucji na Σ . (W drugim przypadku na Σ dochodzi do przełączenia do potoku sliding.) Niech $\sigma(x, \mu) = \langle H_x, F_1 \rangle(x, \mu) \langle H_x, F_2 \rangle(x, \mu)$, gdzie $\langle H_x, F_1 \rangle$ oznacza pochodną kierunkową H względem pola wektorowego F_1 . (Zauważmy, że indeks dolny 'x' oznacza operator różniczkowy, a x w innym kontekście oznacza punkt w przestrzeni fazowej.) Powierzchnia przełączająca Σ może być podzielona na dwa podzbiory, powiedzmy Σ_c i Σ_s , zdefiniowane jako:

$$\Sigma_c := \{x \in \Sigma : \sigma(x, \mu) > 0\}, \quad \Sigma_s := \{x \in \Sigma : \sigma(x, \mu) \leq 0\}.$$

Wymagamy, by:

$$\langle H_x, (F_2 - F_1) \rangle > 0 \quad (90)$$

na Σ_s . Dla trajektorii wygenerowanej przez pole wektorowe F_1 (lub F_2) osiąga Σ_c następuje przełączenie do pola wektorowego F_2 (lub F_1) na Σ_c . Zauważmy, że tego typu trajektorie jest ciągła lecz składa się z segmentów wygenerowanych przez pola wektorowe F_1 i F_2 . Z drugiej strony, jeżeli trajektorie osiąga Σ_s z rejonu S_1 lub S_2 , wtedy dalsza ewolucja jest generowana przez potok typu sliding na Σ_s i odpowiadające pole wektorowe ma postać:

$$F_s = \alpha_s F_1 + (1 - \alpha_s) F_2, \quad (91)$$

gdzie $\alpha_s = \frac{\langle H_x, F_2 \rangle}{\langle H_x, (F_2 - F_1) \rangle}$ na Σ_s i $0 \leq \alpha_s \leq 1$.

Funkcja α_s może być wykorzystana, by zdefiniować granice rejonu gdzie jest możliwa ewolucja sliding. To znaczy:

$$\partial \Sigma_s := \{x \in \Sigma : \alpha_s(x, \mu) = 1\}, \quad \partial \Sigma_s^0 := \{x \in \Sigma : \alpha_s(x, \mu) = 0\}.$$

Z warunku (90) wynika, że wewnątrz rejonu Σ_s jest *stabilnym* rejonem typu sliding, tzn. pola wektorowe wskazują na Σ z każdej strony powierzchni przełączającej.

3.3.1 Warunki analityczne dla odwzorowania Poincarégo

Pomińmy na moment istnienie przełączenia i ewolucji sliding. To znaczy rozważmy układ zdefiniowany przez pole wektorowe F_1 na całym zbiorze \mathbb{D} . Załóżmy, że układ dla wartości parametru $\mu = \mu^*$ charakteryzuje się okresowym cyklem granicznym $x(t)$ i okresie T^* gdzie $H(x(t), \mu) > 0$ dla wszystkich punktów na orbicie $x = x^*$ gdzie:

$$H(x^*, \mu^*) = 0, \quad (92)$$

$$\langle H_x, F_1 \rangle(x^*, \mu^*) = 0, \quad (93)$$

i druga pochodna kierunkowa jest nie-zero. Ograniczymy się do sytuacji, dla której druga pochodna kierunkowa jest dodatnia, czyli:

$$\langle \langle H_x, F_1 \rangle_x, F_1 \rangle(x^*, \mu^*) > 0. \quad (94)$$

Zdefiniujmy przekrój Poincarégo Π , który zawiera punkt x^* , jako:

$$\Pi := \{x \in \mathbb{D} : \langle H_x, F_1 \rangle(x^*, \mu^*) = 0\}.$$

Z (94), wynika że Π jest poprzeczna względem cyklu granicznego, a więc na Π możemy zdefiniować odwzorowanie Poincarégo $P : \Pi \times \mathbb{R} \mapsto \Pi$ dla otoczenia punktu (x^*, μ^*) . Punkt x^* jest punktem stałym (niezmienniczym) dla odwzorowania P dla $\mu = \mu^*$. Załóżmy, że Jakobian P w punkcie (x^*, μ^*) nie posiada wartości własnej w module równej 1. Z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej wynika, że $\forall \mu$ w dostatecznie małym otoczeniu (x^*, μ^*) istnieje jednoznacznie określona rodzina punktów stałych $\hat{x}(\mu)$ z $\hat{x}(\mu^*) = x^*$. Załóżmy istnienie dodatkowego warunku:

$$\left. \frac{dH(\hat{x}(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=\mu^*} \neq 0, \quad (95)$$

który zapewnia, że \hat{x} zmienia położenie względem Σ pod wpływem zmiany parametru. Jeżeli $H(\hat{x}(\mu), \mu) \geq 0$ wtedy $\hat{x}(\mu)$ należy do orbity okresowej układu Filippov. Z drugiej strony, jeżeli $H(\hat{x}(\mu), \mu) < 0$ wtedy $\hat{x}(\mu)$ nie odpowiada orbicie okresowej dla układu Filippova. Dla μ^* w układzie istnieje okresowy cykl graniczny charakteryzujący się kontaktem typu grazing i układ spełnia warunki (90), (92), (93), (94) i (95) dla bifurkacji grazing-sliding.

3.3.2 Redukcja do odwzorowania o wymiarze jeden

Twierdzenie 5 *Rozważmy układ Filippova (88), który charakteryzuje się jedno-parametryczną bifurkacją typu grazing-sliding. Zakładając, że są spełnione nierówności $a > 0$, $b > a^2$ i $\gamma = -C > 0$, zachowanie dynamiczne układu opisujące trajektorie, które charakteryzują się istnieniem segmentu typu sliding $\forall x \in \partial\Sigma_s$ w dostatecznie małym otoczeniu punktu x^* gdzie dochodzi do kontaktu typu grazing, jest opisane przez odwzorowanie o wymiarze jeden $\partial\hat{\Sigma}_s \mapsto \partial\hat{\Sigma}_s$, którego postać funkcjonalna jest wyrażona jako:*

$$w_{n+1} = \begin{cases} -\gamma w_n - 1 & \text{dla } w_n < 0, \\ -(\gamma a + b)w_n + \gamma - 1 & \text{dla } 0 < w_n < 1/a, \\ (\gamma(b - a^2) - ab)w_n + \gamma(a + 1) + b - 1 & \text{dla } w_n > 1/a. \end{cases} \quad (96)$$

Redukcja 3-wymiarowego potoku Filippova do powyższego jednowymiarowego nieciągłego odwzorowania jest pokazana w [K3]. Należy zwrócić uwagę, że taka redukcja jest możliwa ze względu na fakt, że powyższe odwzorowanie opisuje zachowanie dynamiczne trajektorii, w dostatecznie małym otoczeniu cyklu granicznego podlegającego jedno-parametrycznej bifurkacji grazing-sliding, tylko dla trajektorii posiadających segment typu sliding. Co więcej, ze względu na występującą nieciągłość powyższe odwzorowanie charakteryzuje się złożonym zachowaniem dynamicznym.

W szczególności, w [K3] po raz pierwszy udowodniliśmy, że jedno-parametryczna bifurkacja grazing-sliding może prowadzić do bifurkacji w wyniku, której z jednego atraktora emanuje kilka atraktorów, zakładając spełnienie warunków, które są podane w kolejnym twierdzeniu. Powstanie innego rodzaju atraktorów, które zaobserwowano w ciągłych ale nie różniczkowalnych odwzorowaniach i które mogą powstać w wyniku jedno-parametrycznej bifurkacji grazing-sliding w zależności od wymiaru przestrzeni fazowej odpowiadającego układu Filippova były analizowane w [50]. Dla zredukowanego odwzorowania tzw. bifurkacja border-collision odpowiada bifurkacji grazing-sliding w układzie Filippova i wymiar przestrzeni odwzorowania pełni istotną rolę determinującą ilość atraktorów, które mogą brać udział w bifurkacji border-collision, jak pokazano np. w [57, 89].

3.3.3 Klasyfikacja zachowania dynamicznego

Twierdzenie 6 *Rozważmy odwzorowanie (96) podlegające ograniczeniom podanym w Twierdzeniu 5. Dla każdego (a, γ) gdy:*

$$\gamma > 1, \quad a < 1, \quad 0 < a < \frac{\gamma - 1}{\gamma^2 - \gamma + 1},$$

istnieje nietrywialny przedział wartości b , taki że odwzorowanie ma dwa stałe punkty stabilne, jeden na przedziale $(0, 1/a)$ a drugi w $(1/a, \infty)$. Dla każdego (a, γ) gdy:

$$\gamma > 1, \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma^2 + 1} < a < \frac{\gamma - 1}{\gamma^2 - \gamma + 1},$$

istnieje nietrywialny przedział wartości b , taki że w odwzorowaniu występuje atraktor chaotyczny na przedziale $[-1, \gamma - 1]$ oraz stały punkt stabilny na przedziale $(1/a, \infty)$.

Praca [K3] pozwoliła nam na skonstruowanie 3-wymiarowego układu Filippova, w którym występuje jedno-parametryczna bifurkacja o charakterze grazing-sliding prowadząca do powstania wielu atraktorów z jednego atraktora. W szczególności w [K2], skonstruowaliśmy jawny 3-wymiarowy układ Filippova, w którym występuje jedno-parametryczna bifurkacja grazing-sliding prowadząca do powstania wielu atraktorów. Jest to pierwszy taki przykład układu Filippova, w którym występuje tego typu bifurkacja, opisany w literaturze. W [K2] zaprezentowane są trzy jakościowo różne scenariusze zachowania dynamicznego w wyniku bifurkacji grazing-sliding. W [K2] zaprezentowaliśmy: (a) powstanie w wyniku bifurkacji dwóch stabilnych cykli granicznych z segmentem sliding o okresie dwa i trzy; (b) współlistnienie atraktora chaotycznego ze stabilnym cyklem granicznym z jednym segmentem typu sliding o okresie trzy; oraz współlistnienie dwóch stabilnych cykli granicznych, jeden bez segmentu sliding a drugi o okresie trzy z dwoma segmentami typu sliding. Powyższe prace pokazują istotną cechę form normalnych użytych do skonstruowania potoku Filippova, którego cechuje określone zachowanie dynamiczne. To znaczy, że względu na fakt, że forma normalna, którą wykorzystujemy jest ważna tylko lokalnie w otoczeniu punktu bifurkacyjnego „rozmiar” dozwolonej perturbacji parametru bifurkacyjnego w otoczeniu bifurkacji musi być dokładnie dobrany w celu zaobserwowania zachowania dynamicznego przewidzianego przez odwzorowanie. Innymi słowy, dostatecznie małe otoczenie punktu bifurkacyjnego gdzie zachowanie jest opisane formą normalną dla układów kawałkami gładkich, wydaje się oznaczać inny wymiar wielkości dopuszczalnych zmian parametru niż w kontekście bifurkacji w układach gładkich. Należy również dodać, że nawet dla trójwymiarowych potoków Filippova pełne zachowanie dynamiczne jakie jest dopuszczalne w pobliżu bifurkacji grazing-sliding nie jest do końca poznane. Na przykład w [92] jest badane powiązanie pomiędzy bifurkacją grazing-sliding oraz istnieniem języków Arnoldda.

3.4 Różne nowe klasy bifurkacji wywołanych nieciągłościami (DIB)

Metodologia zastosowana do klasyfikacji jedno- i dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB, którą prezentuję w bieżącej pracy jasno wskazuje trudności w stworzeniu jednolitej teorii dotyczącej DIBs. Po pierwsze, w zależności od rodzaju nieciągłości jedno- czy dwu-parametryczna bifurkacja musi być zdefiniowana w odpowiedni sposób, by móc dobrać parametry umożliwiające rozwinięcie bifurkacji. Po drugie, zachowanie dynamiczne wynikające z bifurkacji jest zależne od wymiaru przestrzeni fazowej układu. Po trzecie, otwartą jest również kwestia jakiego typu perturbacja jest dopuszczalna dla DIBs w układach kawałkami gładkich; w [23] różnego typu DIB są zaprezentowane przy użyciu jawnie opisanych przykładów. W bieżącym akapicie zaprezentujemy nową klasę jedno-parametrycznych DIB, którą analizowałem w [K1], a która to bifurkacja jest istotna w kontekście zastosowań w układach automatyki.

Będziemy rozważać klasę układów danych w postaci:

$$\dot{x} = A_I x \quad \text{for} \quad |Cx| \leq \phi, \tag{97}$$

$$\dot{x} = A_O x \quad \text{for} \quad |Cx| > \phi, \tag{98}$$

gdzie $A_I \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nie jest macierzą osobliwą i posiada wartości własne odpowiadające węzłowi o charakterze punktu siodłowego a $A_O \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nie jest macierzą osobliwą o wartościach własnych odpowiadających stabilnemu punktowi węzłowemu o charakterze ogniska. Iloczyn skalarny wektora stanu $x \in \mathbb{R}^2$ i stałego wektora $C \in \mathbb{R}^2$ określa przełączanie pomiędzy dwoma liniowymi polami wektorowymi dla pewnej ustalonej dodatniej wartości ϕ . Będziemy analizować nowy rodzaj bifurkacji Hopfa dla powyższej klasy układów, gdzie parametrem bifurkacyjnym będzie ciągła zmiana wektora kontrolnego z $C = C_0$ na $C = C_0^\varepsilon$.

3.4.1 Planarne układy przełączane ze strefą martwą

Rozważmy układy przełączane, dla których parametr bifurkacyjny, powiedzmy β , jest zwiększany od wartości 0 i powoduje zmianę wektora C_0 z $C_0 = [-1 \ 0]$ do $C_0^\varepsilon = [-1 \ \beta]$, gdzie $\beta = \mathcal{O}(\varepsilon)$. W kontekście zastosowań w automatyce, tego typu perturbacja polega na zmianie kontroli w pętli sprzężenia zwrotnego, z kontroli opartej o sygnał położenia, na kontrolę opartą o sygnał położenia i prędkości.

Macierze A_I , A_O , wektor stanu \mathbf{x} i szerokość strefy martwej są dane w postaci:

$$A_I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad A_O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A - K_p & -K_d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad |C_0 \mathbf{x}| \leq \theta^*, \text{ or } |C_0^\varepsilon \mathbf{x}| \leq \theta^*, \quad (99)$$

gdzie $K_p > A > 0$, $K_p - A > K_d^2/4$, $K_d > 0$ i $\theta^* > 0$. Dla powyższej reprezentacji układu, wartości własne macierzy A_I odpowiadają punktowi węzłowemu o charakterze siodłowym, a wartości własne macierzy A_O odpowiadają punktowi węzłowemu o charakterze stabilnego ogniska, tak jak założyliśmy wcześniej. Macierz A_I jest wyrażona w tzw. postaci kanonicznej macierzy obserwowalnej [14, 16] i taka struktura może być przyjęta bez utraty ogólności.

3.4.2 Jedno-parametryczna bifurkacja DIB o charakterze Hopfa

Twierdzenie 7 *Rozważmy układ Filippova (97)-(98) gdzie A_I i A_O są zdefiniowane powyżej. Zakładając perturbację rzędu $\mathcal{O}(\varepsilon)$ zastosowaną do linii przełączającej poprzez zmianę wektora współczynników $C_0 = [-1 \ 0]$ do wektora $C_0^\varepsilon = [-1 \ \beta]$, gdzie $\beta = \mathcal{O}(\varepsilon)$, układ podlega superkrytycznej bifurkacji o charakterze Hopfa w wyniku, której stabilny pseudo-węzeł traci satbilność i w układzie powstaje stabilny cykl graniczny otaczający niestabilne węzeł o charakterze pseudo-węzła. Amplituda cykli granicznych ma skalę rzędu $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ wielkości perturbacji.*

Z powyższego twierdzenie wynika, że przełączane układy liniowe ze strefą martwą i sprzężeniem zwrotnym wykorzystującym tylko sygnał położenia, pod wpływem małych perturbacji parametrycznych zmieniających sygnał kontrolny sprzężenia zwrotnego z sygnału położenia do sygnału położenia i prędkości może prowadzić do nowego typu bifurkacji DIB o charakterze Hopfa. W wyniku tej bifurkacji stabilny pseudo-węzeł (węzeł leżący na rozmaitości przełączającej) traci stabilność i jest otoczony przez cykl graniczny, powstający w układzie w wyniku bifurkacji. Ten nowy typ bifurkacji został przeze mnie przeanalizowany przy wykorzystaniu metod asymptotycznych. Pokazałem utratę stabilności pseudo-węzła oraz powstanie stabilnych cykli granicznych, których amplituda, powiedzmy $|x|$, rośnie jak pierwiastek parametru bifurkacyjnego ($|x| = \mathcal{O}(\sqrt{\beta})$, gdzie β odnosi się do parametru bifurkacyjnego).

W [K1] rozważałem również układy przełączające, dla których sygnał kontrolny sprzężenia zwrotnego jest tylko sygnałem pozycji. Układ charakteryzuje się również strefą martwą lecz funkcja przełączająca zawiera opóźnienie czasowe. Zbadałem numerycznie zachowanie się takiego układu dla małych wartości opóźnienia czasowego $\tau = \mathcal{O}(\varepsilon)$, który został ustalony jako parametr bifurkacyjny. Interesującym odkryciem jest to, że układ, dla tych samych wartości parametrów, jak dla przypadku układu bez opóźnienia czasowego, charakteryzuje się bifurkacją o charakterze Hopfa, która zarówno jakościowo jak i ilościowo pokrywa się z odkrytą i opisaną przeze mnie bifurkacją o charakterze Hopfa. W literaturze naukowej dotyczącej automatyki jest sugerowane, że opóźnienie czasowe w sygnale położenia może być wykorzystane do przybliżenia sygnału prędkości ze względu na fakt, że $v \approx (x(t + \tau) - x(t))/\tau$.

Niemniej, należy zwrócić uwagę, że w naszym przypadku opóźnienie czasowe jest zawarte tylko w funkcji wykorzystywanej do detekcji przełączenia więc otrzymany wynik numeryczny jest zaskakujący. Najprostszym teoretycznym wytłumaczeniem powyższego wyniku jest fakt, że dla dostatecznie małego opóźnienia, opóźniająca linia przełączająca może być przybliżona linią przełączającą, która jest zależna od sygnału położenia i prędkości, zakładając, że czas ewolucji pomiędzy przełączeniami jest większy, niż opóźnienie czasowe τ (co jest prawdziwe w rozpatrywanym przypadku).

Podobny układ był analizowany w [8, 87] i w zacytowanych pracach zostały zaobserwowane cykle graniczne powstające z pseudo-węzła. Niemniej, wspomniane układy charakteryzowały się również obecnością opóźnień czasowych w składowych położenia i prędkości. Bifurkacje spowodowane przez zmianę parametrów kontrolnych układu, które prowadzą do powstania cykli granicznych w układach z przełączaniem, były obserwowane w różnych kontekstach; np. pod wpływem wprowadzenia małej histerezy (zobacz Akapit. 2.1 w [72]). W niektórych przypadkach tego typu bifurkacje mogą być postrzegane jako bifurkacje z nieskończoności, np. w [36, 66]. Na podstawie tych wyników można łatwo zauważyć, że cykle graniczne mogą powstać z pseudo-węzłów w układach z przełączaniem na różne sposoby i wyczerpująca klasyfikacja, czy też teoria pozwalająca na ujednoczenie tego typu bifurkacji dla układów kawałkami gładkich wydaje się bardzo trudna.

Być może jedną ze ścieżek, dzięki której można by sklasyfikować różnego rodzaju bifurkacje o charakterze Hopfa w układach kawałkami gładkich byłoby rozważenie prawa skalowania względem parametru bifurkacyjnego. To znaczy, można zauważyć, że bifurkacja którą opisałem w bieżącym akapicie różni się od bifurkacji o charakterze Hopfa analizowanej w [46], biorąc pod uwagę prawo skalowania amplitudy cyklu granicznego względem parametru bifurkacyjnego β . We wspomnianej pracy amplitudy cyklu granicznego powstałego w wyniku bifurkacji rośnie liniowo względem parametru bifurkacyjnego. Prowadzi to do naturalnego pytania czy w układach kawałkami gładkich różnego typu bifurkacje o charakterze Hopfa nie mogłyby zostać podzielone na klasy charakteryzujące się różnym skalowaniem względem parametru bifurkacyjnego.

4 Inne badania i wyniki

4.1 Układy z opóźnieniem czasowym w funkcji przełączającej

Układy automatyki z przełączaniem i sprzężeniem zwrotnym, które są modelowane przy pomocy idealizowanych przełączników typu „włączony/wyłączony”, lub przełączenia pomiędzy dwoma stanami - jednym dodatnim drugim ujemnym - które są nazywane jako układy kontrolne z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, często charakteryzują się obecnością histerezy, symetrią jak również obecnością opóźnień czasowych w sygnale kontrolnym. Przykładem takiego typu układ kontrolnego, w skali makroskopowej, jest układ neuromotoryczny zapewniający stabilne stanie człowieka w spoczynku. W trakcie spokojnego stania człowieka opóźnienie dla sygnału kontrolnego układu neuromotorycznego wynosi około 150ms i powoduje impulsowe ruchy mięśniowe. W [KO4,KO7] badaliśmy układy dynamiczne, które charakteryzują się przełączaniem pomiędzy dwoma różnymi polami wektorowymi, obecnością histerezy oraz opóźnieniem w funkcji przełączającej.

Główne wyniki z [KO4] mogą być podsumowane w następujący sposób: 1. w przypadku ujemnego sprzężenia zwrotnego i histerezy bez opóźnienia czasowego w funkcji przełączającej udowodniliśmy, że układ planarny może posiadać tylko tzw. unimodalne cykle graniczne (tzn. cykle graniczne charakteryzujące się dwoma momentami przełączenia i jednym maksimum), jeżeli istnieją w układzie cykle graniczne; 2. w przypadku dodatniego sprzężenia zwrotnego i histerezy bez opóźnienia czasowego w funkcji przełączającej udowodniliśmy, że w układzie istnieje możliwość zachowania aperiodycznego lub chaotycznego; 3. w przypadku małych opóźnień czasowych (w sensie, który będzie wyjaśniony dla dyskusji wyników zawartych w [KO7]), udowodniliśmy że zachowanie dynamiczne układu z opóźnieniem czasowym odpowiada zachowaniu dynamicznemu odpowiednio dobranego układu ze sprzężeniem zwrotnym; 4. wyprowadziliśmy analitycznie diagram opisujący zachowanie dynamiczne układu w przestrzeni dwu-parametrycznej, który ilustruje subtelną interakcję pomiędzy szerokością rejonu histerezy i wielkością opóźnienia czasowego; 5. opisaliśmy nową bifurkację typu DIB, którą nazwaliśmy mianem

„event-collision” będącą scenariuszem, który można zaobserwować wyłącznie w układach kawałkami gładkich z opóźnieniem w funkcji przełączającej, co jest przedmiotem badań pracy [KO7].

Dla opóźnienia, które osiąga pewną wartość zależną od przedstawionego problemu, wtedy może dojść do bifurkacji wywołanej przez nieciągłość zwanej „event collision”. Praca [KO7] klasyfikuje i analizuje „event collisions” dla cykli granicznych. W szczególności w [KO7] rozpatrujemy bifurkacje typu event collisions symetrycznych cykli granicznych w układach z pełną symetrią względem punktu $\mathbf{0}$ (symetria Z_2), która jest często spotykana w zastosowaniach. Wyprowadziliśmy jawne wyrażenia na odwzorowanie Poincarégo dla punktów w dostatecznie małym otoczeniu cyklu granicznego, który podlega bifurkacji event-collision (Lemat 8 i Twierdzenie 9 w Akapicie. 4.2). Odwzorowanie Poincarégo jest kawałkami gładkie, skończenie wymiarowe, z wymiarem obrazu, który ulega zmianie pod wpływem bifurkacji. W drugiej części artykułu wykorzystujemy ten wynik, by przeanalizować zachowanie liniowego oscylatora o jednym stopniu swobody, który bez układu kontrolnego jest niestabilny. W układzie odkryliśmy zbiór niezmienniczy o charakterze torusa, który kontynuowaliśmy w przestrzeni parametrycznej. Zaobserwowaliśmy również powstanie niezmienniczych zbiorów o charakterze wieloboków, które powstały w wyniku kolejnej bifurkacji typu event-collision, tym razem torusa. Twierdzenie 9 może być w prosty sposób uogólnione do innego rodzaju symetrii i innych przełączeń dwustanowych (z uwzględnieniem dodatkowej notacji) pod warunkiem, że symetria może być wykorzystana do redukcji wymiaru odwzorowania Poincarégo w dostatecznie małym otoczeniu cyklu granicznego. Zaproponowana redukcja układu do odwzorowania kawałkami gładkiego w otoczeniu bifurkującego cyklu granicznego, pozwala na wykorzystanie teorii i metod numerycznych rozwiniętych dla gładkich i kawałkami gładkich odwzorowań do analizy układów z opóźnieniem w linii przełączającej. Ze strony analizy numerycznej rozwinięta teoria pozwala na bezpośrednią kontynuację parametryczną cykli granicznych, ich bifurkacji jak również bifurkacji typu DIB, takich jak bifurkacje typu grazing czy event-collisions jak również kontynuację parametryczną gładkich krzywych niezmienniczych.

Stabilne i ogólne metody numeryczne wykorzystywane do detekcji i kontynuacji cykli granicznych bifurkacji typu DIB są obecnie aktywną gałęzią badań naukowych i zostały rozwinięte, np. przez Piironena [78], Dercole i Kuznetsova [31]. Zostały również rozwinięte metody numeryczne do kontynuacji krzywych niezmienniczych, np. w [28, 82]. Niemniej, ciągle jest duża rozbieżność pomiędzy rozwiniętymi metodami numerycznymi do kontynuacji krzywych niezmienniczych a ich dostępnością w postaci softwaru gotowego do zastosowania. Z tego względu, by przedstawić wyniki z rozdziału 6 w artykule, nie mogliśmy się opierać na dostępnych narzędziach, lecz musieliśmy sami przeprowadzić badania numeryczne, co nie jest trywialnym zadaniem. Twierdzenie o redukcji układu mogło zostać efektywnie wykorzystane do przeprowadzenia badań numerycznych i wskazuje na istotne zastosowania rozwiniętej teorii.

4.2 Zachowanie dynamiczne układów kawałkami gładkich osobliwych zaburzonych

Istotnym zagadnieniem w teorii układów kawałkami gładkich, dla jedno- i dwu-parametrycznych bifurkacji typu DIB, jest zależność tych bifurkacji od zaburzeń osobliwych. W [KO8] rozważałem jak ewolucja typu sliding, dla układu Filippova, jest zależna od perturbacji singular. Jeżeli dodamy małą perturbację do pola wektorowego, lub do funkcji określającej przełączanie (zakładamy, że pochodna perturbacji jest również małą wielkością) to jakkolwiek wykładniczo stabilna orbita okresowa (cykl graniczny) lub punkt węzłowy układu Filippova będzie cały czas istniał w układzie i pozostanie stabilny, tak jak pokazaliśmy w [KO8]. Stabilność względem tego typu regularnych perturbacji jest również zachowana dla pseudo-węzłów (węzłów potoku generującego ewolucję sliding, które znajdują się na rozmałości przełączającej) jak i cykli granicznych z segmentem typu sliding. Tego typu zachowanie jest takie samo jak w przypadku klasycznej teorii dla rozmałości niezmienniczych dla teorii gładkich układów dynamicznych[43].

Innego rodzaju typową perturbacją, która pojawia się w sposób naturalny w procesie modelowania, to tzw. perturbacja osobliwa. W prostych modelach zastępujemy szybko zbieżne kierunki ewolucji poprzez wyrażenie ich jako stan węzłowy, zakładając, że punkt węzłowy podąża za „wolną” ewolu-

cją układu w sposób quasi-statyczny. Dla bardziej złożonego przypadku (wierniej odzwierciedlającego rzeczywistą ewolucję) stan węzłowy dla „szybkiej” części ewolucji nie jest osiągnięty, co stanowi małą perturbację układu. Praktyczne przypadki tego rodzaju perturbacji to małe pojemności bądź indukcyjności w układach elektrycznych, brak idealnej sztywności w układach mechanicznych lub też szybkie reakcje chemiczne (lub też innego rodzaju procesy) w układach biologicznych. Jeżeli chodzi o różniczkowalne układy dynamiczne teoria klasyczna [43] zapewnia, że wszystkie hiperboliczne węzły, normalnie hiperboliczne rozmaitości niezmiennicze są niezmiennicze względem perturbacji osobliwej.

To znaczy, na przykład, wykładniczo stabilny węzeł bądź cykl graniczny (i jakakolwiek bifurkacji tych zbiorów), która występuje w uproszczonym modelu przy użyciu quasi-statycznego założenia będzie również obecna gdy zostanie wzięta pod uwagę „szybka” ewolucja, tak długo dopóki różnica w skalach czasu jest dostatecznie duża. Ogólnie w różniczkowalnych układach dynamicznych jakiegokolwiek zjawiska, które pozostają niezmiennicze pod wpływem regularnych perturbacji (perturbacji prawej strony) również pozostaną niezmiennicze pod wpływem perturbacji osobliwej. Twierdzenie Fenichela umożliwia zredukowanie hiperbolicznych perturbacji osobliwych od regularnych poprzez udowodnienie istnienia normalnie hiperbolicznej rozmaitości niezmienniczej [43].

W [KO8], udowodniliśmy że stabilne perturbacje osobliwe mają dużo większy wpływ na zachowanie dynamiczne w układach Filippova, niż w gładkich układach dynamicznych. Pokazaliśmy, że stabilne pseudo-węzły jak i stabilne cykle graniczne (z bądź bez segmentu sliding) nie koniecznie pozostają niezmiennicze w układzie. Rozważaliśmy cykl graniczny z infimezimalnie małym segmentem typu sliding, tzn. istniejącym w pobliżu bifurkacji typu grazing-sliding. Odkryliśmy dwa ogólne przypadki zależne od geometrii: tzn. lokalne odwzorowanie Poincarégo dla dostatecznie małego otoczenia cyklu granicznego podlegającego bifurkacji grazing-sliding charakteryzuje się nieciągłością, w wypadku gdy warunek na istnienie stabilnego rejonu typu sliding (na rozmaitości przełączającej) nie jest spełniony. W przeciwnym wypadku ciągłość odwzorowania Poincarégo jest zachowana, lecz może wystąpić zmiana dla czynnika wiodącego odwzorowania będąca rzędu 1 (jednorodnie dla $\varepsilon \rightarrow 0$). Jakościowa zmiana charakteru lokalnego odwzorowania generuje zmianę w zachowaniu dynamicznym układu w skali $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Dla odwzorowanie z nieciągłością, kawałkami gładkiego, które po jednej stronie nieciągłości charakteryzuje się osobliwością dominującego czynnika odwzorowania rzędu $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, parametry określających kąt nachylenia funkcji przełączającej musi spełniać nierówność $\theta < 0$ dla przykładu minimalnego. Dla tego typu odwzorowania obserwujemy kaskadę bifurkacji polegającą na odwróconej sekwencji dodawania okresu dla niezmienniczego punktu okresowego, pod wpływem zmiany parametru bifurkacyjnego[39]. Zakres zmian parametru, dla którego jest obserwowana ta sekwencja jest $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Dla drugiego przypadku, gdy $\theta > 0$, zachowanie dynamiczne w dużym stopniu zależy od jednostronnej pochodnej $s(\theta; 0; 0)$ zdefiniowanej w Lemacie 3. Zachowanie może być chaotyczne dla $s(\theta; 0; 0) < -1$, co jest możliwe dla małych wartości θ . Przeprowadzona analiza opisuje zachowanie dynamiczne dla skali rzędu $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ w przestrzeni fazowej i parametrycznej.

Wyniki Lematu 3 mogą być uogólnione do więcej wymiarowych układów „slow-fast” tak długo dopóki wymiar części szybko zbieżnej („fast”) jest równy 1. Niemniej, pewne techniczne trudności pojawiają się przy próbach uogólnienia wyrażenia zawartego w Lemacie 3 gdy układ „fast” posiada więcej niż jeden wymiar ($y \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$); trajektoria, która podąża wzdłuż stabilnych włókien (podążająca wzdłuż trajektorii generowanej stabilny liniowy zwyczajny układ różniczkowy) może przeciąć rozmaitość przełączającą kilkakrotnie. Dla \mathbb{R}^1 każda trajektoria stabilnego układu liniowego zbliża się do rozmaitości przełączającej w sposób monotoniczny, co już nie jest spełnione w \mathbb{R}^2 dla normy Euklidesowej. Co więcej, odwzorowanie przez nieciągłość przy użyciu przekroju Poincarégo nie jest dane w sposób jawny, lecz tylko jako pierwiastek nieliniowego równania. Ogólnie, to niejawne wyrażenie jest określone dla przecięcia się trajektorii generowanej przez stabilny układ różniczkowy z hiperpłaszczyzną.

W [KO10] rozważamy jakościowe zachowanie dynamiczne układu kawałkami gładkiego typu „slow-fast” (układy z perturbacją osobliwą), które są ciągle. Wymiar przestrzeni fazowej to dwie jednowymiarowe przestrzenie - jedna dla dynamiki wolnej (slow) i jedna dla szybkiej (fast). „Wolna” rozmaitość układu zredukowanego jest ciągłą, kawałkami gładką krzywą, a różniczkowalność jest utranocna na powierzchni przełączającej. Dla całego układu „wolna” rozmaitość traci ciągłość i obserwujemy $\mathcal{O}(\varepsilon)$

nieciągłość przecinającą rozmaitość przełączającą. Niemniej zaobserwowana nieciągłość nie może jakościowo zmienić zachowania dynamicznego układu, co jest standarowym wynikiem, który może być pokazany przy użyciu teorii Fenichela. Głównym wynikiem artykułu jest opis przestrzeni facowej, który umożliwia rozwinięcie zachowania dynamicznego układów kawałkami gładkich typu „slow-fast” posiadających punkt węzłowy na powierzchni przełączającej. W tym przypadku, zachowanie dynamiczne w dostatecznie małym otoczeniu punktu węzłowego odpowiada bifurkacji typu DIB zwanej bifurkacją typu boundary-equilibrium. Pokazaliśmy, że bifurkacje boundary-equilibrium prowadzą do czterech jakościowo różnych portretów fazowych. Nasze wyniki zostały następnie użyte do badania zachowania dynamicznego tzw. modelu pudełkowego cyrkulacji thermohalinicznej. W modelu zostało pokazane wystąpienie bifurkacji typu boundary-equilibrium o charakterze siodłowym. W kontekście zastostowania powyższej pracy do analizowania modelu pudełkowego cyrkulacji thermohalinicznej, obecność multi-stabilności wskazuje na możliwość odwrócenia pływu cyrkulacji thermohalinicznej.

Cztery scenariusze, których istnienie zostało pokazane w planarnych szybko-wolnych (slow-fast) układach będą również występowały dla większej ilości wymiarów układu wolnego. Niemniej, jest bardzo prawdopodobne, że zostanie również wygenerowane dodatkowe zachowanie dynamiczne; bifurkacje typu boundary-equilibrium dla trójwymiarowych układów kawałkami gładkich prowadzą, na przykład, do podobnej bifurkacji jak Hopf, lecz z cyklem granicznym, którego amplituda rośnie w sposób liniowy w wyniku kolizji pseudo-węzła z rozmaitością przełączającą [35]. Powyższy przykład prowadzi do pytań takich jak np. czy dodatkowe zachowanie dynamiczne może zostać wygenerowane w wyniku obecności więcej niż jednego wymiaru o szybkiej dynamice.

4.3 Zachowanie dynamiczne dla różnych klas układów hybrydowych

W ostatnich latach znacznie wzrosło zastosowanie mikrokomputerów jako urządzeń kontrolnych, co naturalnie doprowadziło do szerokiego zastosowania cyfrowych układów kontrolnych [61, 80]. Obecnie cyfrowe układy kontrolne pojawiają się w wielu zastosowaniach, które są tak różne jak: kontrola procesów chemicznych, kontrola ruchu lotniczego, czy w przemyśle produkującym narzędzia [47, 40]. Kontrola, projektowanie i analiza takiego rodzaju układów kontrolnych musi wziąć pod uwagę wzajemne oddziaływanie na siebie zachowania ciągłego i dynamicznego. Na przykład, zautomatyzowana kontrola samochodu poruszającego się na drodze jest stosowana przez mikroprocesor operujący na sygnałach dyskretnych lecz samochód, skali makroskopowej, porusza się w sposób ciągły w czasie i w przestrzeni [56]. Komputery, których używa się w takich układach wysyłają sygnał cyfrowy, który jest następnie zamieniany na sygnał analogowy, który może już być wysłany do siłownika analogowego. Sygnał kontrolny, odpowiadający skończonej sekwencji cyfr, zostaje wysłany, bądź odebrany, przez komputer w dyskretnych przedziałach czasowych, powiedzmy τ , który nazwiemy czasem próbkowania. W [KO6, KO10, KOCf9] badamy zachowanie dynamiczne układu Filippova z informacją na temat przełączenia zadaną nie dla każdego czasu, lecz tylko w dyskretnych przedziałach czasowych.

W [KO6] rozważaliśmy zachowanie dynamiczne jedno-wymiarowego dwustanowego układu kontrolnego, dla którego zmienna kontrolna była zadana w dyskretnych przedziałach czasowych. W przypadku gdy ewolucja układu była liniowa, dla każdego z dwóch stanów kontrolnych, otrzymaliśmy przeskalowane odwzorowanie cykliczne, które opisuje zachowanie układu. Następnie pokazaliśmy, że w zależności od parametrów układu możemy zaobserwować rodzinę orbit okresowych, quasi-okresowych i pasmową strukturę quasi-okresowości. Przy użyciu podobnej metodologii rozszerzyliśmy naszą analizę do przypadku ewolucji układu generowanej przez ogólną funkcję nieliniową. W szczególności pokazaliśmy, że atraktor stały oraz chaotyczne zachowanie dynamiczne są obecne w układzie dla tego bardziej ogólnego przypadku. Zaprezentowaliśmy również wyniki, które łączą czas próbkowania z szerokością przedziału, na którym może osadzić się ewolucja asymptotyczna po przejściowej ewolucji (Lemat 6.3).

W [KO10] rozważaliśmy ogólny planarny układ Filippova z próbkowaniem cyfrowym, tym razem dla próbkowania zmiennej stanu. Pokazaliśmy, że próbkowanie może doprowadzić do wystąpienia atraktora chaotycznego. Następnie zbadaliśmy szczegółowo minimalny przykład, by odkryć mechanizm prowadzący do wystąpienia zachowania chaotycznego. Udowodniliśmy istnienie przynajmniej jednego atraktora chaotycznego, lecz nie wykluczaliśmy istnienia innych atraktorów. Więc jednoznaczność (lub

tranzytywność topologiczna) istniejącego atraktora chaotycznego w ograniczonym rejonie jest otwartym problemem. Przyпускаjemy, że istniejący atraktor chaotyczny jest rzeczywiście jednoznaczny. Pokazaliśmy, że rozmiar atraktora chaotycznego, mierzony jako odległość pomiędzy atraktorem chaotycznym i stabilnym cyklem granicznym istniejącym w układzie w przypadku, gdy sygnał kontrolny jest dostępny dla każdej wartości zmiennej czasu rośnie liniowo względem zmiany czasu próbkowania τ , dla wszystkich dostatecznie małych wartości τ . Wyniki otrzymane dla minimalnego przykładu zostały uogólnione dla układu planarnego Filippova z próbkowaniem. Przy pomocy układu planarnego pokazaliśmy również, że w granicy $\tau \rightarrow 0$, tzw. metoda Filippova, która pozwala otrzymać potok sliding dla ciągłego sygnału kontrolnego jest zbieżna z polem wektorowym układu dla dyskretnie próbkowanego sygnału kontrolnego. Wspomniany wynik może być wykorzystany do przybliżenia czasu ewolucji układu wzdłuż rozmaitości przełączającej, co z kolei może być wykorzystane, by określić wzrost bądź też pomniejszanie się perturbacji w wyniku ewolucji wzdłuż rozmaitości przełączającej, co z kolei może jakościowo wpłynąć na zachowanie dynamiczne układu. W oparciu o nasze wyniki uważamy, że przeanalizowane zachowanie dynamiczne może również wystąpić w n -wymiarowych układach Filippova, gdzie zmienna określająca przełączanie pomiędzy polami wektorowymi jest dostępna w dyskretnych odstępach czasowych. By zweryfikować powyższe przypuszczenie, przeprowadziliśmy eksperyment numeryczny wykorzystując układ kontrolny trzeciego rzędu, ze sprzężeniem zwrotnym i przekąźnikiem dwustanowym (włączony/wyłączony), gdzie wprowadziliśmy próbkowanie ciągłego sygnału kontrolnego. Okazało się, że w niektórych przypadkach zaobserwowaliśmy przejście pomiędzy stabilnym cyklem granicznym z segmentem typu sliding, który istnieje w układzie gdzie sygnał kontrolny jest ciągle dostępny, do atraktora chaotycznego, który istnieje w układzie gdzie sygnał kontrolny jest dany w dyskretnych odstępach czasowych. W szczególności zaobserwowaliśmy dwa scenariusze. W pierwszym przypadku wprowadzenie próbkowania doprowadziło do utraty segmentu ewolucji typu sliding dla cyklu granicznego (segment sliding został zastąpiony ewolucją wzdłuż rozmaitości przełączającej aż do punktu, w którym po przełączeniu ewolucja była kontynuowana poza rozmaitością przełączającą dla $t \gg \tau$). W drugim przypadku otrzymaliśmy wspomniany już wynik prowadzący do powstania atraktora chaotycznego. W [79] zaprezentowano, że dyskretny sygnał kontrolny, zwykle prowadzi do powstania chaotycznego atraktora w otoczeniu niestabilnego punktu węzłowego. Istnieją pewne podobieństwa, które prowadzą do powstania atraktora chaotycznego w naszym przypadku jak i w przypadku analizowanym w [79]. W naszym przypadku mamy do czynienia z cyklami granicznymi i jeżeli chcemy ustabilizować niestabilną orbitę okresową, która mogłaby wtedy odpowiadać jakiemś pożądanemu stanowi okresowemu jakiegoś układu kontrolnego, zastosowanie dyskretnie próbkowanego sygnału kontrolnego może z dużym prawdopodobieństwem doprowadzić do powstania zachowania chaotycznego, podczas gdy kontrola wykorzystująca ciągły sygnał kontrolny zapewnia istnienie stabilnego cyklu granicznego (z segmentem typu sliding).

W publikacji [79] autorzy twierdzą, że sieci neuronowe z uczeniem maszynowym są w stanie nauczyć się tego typu kontroli. Byłoby interesującym, by zbadać powiązanie pomiędzy naszym wynikiem a sieciami neuronowymi z uczeniem maszynowym. Powinniśmy również wspomnieć, że gwałtowne powstanie zachowania chaotycznego, w wyniku zmiany rodzaju kontroli z ciągłej do dyskretniej jest podobne do gwałtownego przejścia od cyklu granicznego z segmentem sliding do atraktora chaotycznego o małej skali, które może wystąpić w układach Filippova pod wpływem wprowadzenia dowolnie małego opóźnienia w funkcji przełączającej, co zostało pokazane w [85].

4.4 Modelowanie matematyczne kontroli spokojnego stania człowieka poprzez układ neuromotoryczny za pomocą układów Filippova

W ostatnich latach dużo wysiłku badawczego zostało skierowane, by zrozumieć charakter kontroli układu neuromotorycznego człowieka podczas różnego rodzaju zadań wykonywanych przez ten układ. Na przykład, ciągle nie została rozstrzygnięta kontrowersja czy kontrola spokojnego stania człowieka poprzez układ neuromotoryczny, w skali makroskopowej, może być lepiej opisana przy pomocy ciągłych modeli liniowych, czy przy pomocy modeli z nieciągłym sygnałem kontrolnym. Ta kontrowersja, ogólnie rzecz biorąc, doprowadziła do stosowania dwóch kategorii modeli matematycznych. Pierwsza

kategoria to ciągle układy liniowe, rozpatrywane np. w [58, 60]. Tego typu modele wykluczają istnienie wszelkiego rodzaju wartości progowych, przełączeń procesów zależnych od zmiennej czasu takich jak na przykład istnienie otwartych pętli sprzężenia zwrotnego w trakcie kontroli układu neuromotorycznego. Niemniej, gwałtowne dragnia mięśni podczas spokojnego stania zostały odkryte eksperymentalnie [70] co sugeruje, by w procesie modelowania matematycznego wykorzystywać modele z przełączaniem bądź też kontrolą zawierającą otwarte pętle sprzężenia zwrotnego, tak jak np. w [48, 49, 68, 69, 67]. Wprowadzenie tego typu kontroli, w kontekście auktomatyki, prowadzi do tzw. hybrydowych układów kontrolnych, a w kontekście układów dynamicznych do układów kawałkami gładkich. Inny kontekst, w którym w sposób naturalny pojawia się nieciągły sygnał kontrolny to śledzenie celu. Rozważmy przypadek zadania, w którym przy pomocy joysticku osoba musi umieścić kropkę na ekranie komputera w pewnym określonym miejscu. W eksperymencie ruch elektrycznej kropki jest generowany w sposób elektroniczny jako sygnał wyjściowy niestabilnego układu, którego sygnał wejściowy jest szumem modelującym zakłócenia a człowiekiem jest elementem kontrolnym w pętli sprzężenia zwrotnego. Okazuje się, że optymalną strategią na umieszczenie elektrycznej kropki w pożądanym miejscu jest stosowanie delikatnych uderzeń w joystick. Więc nie ciągły, lecz przerywany sygnał kontrolny jest używany przez układ neuromotoryczny. Warto również wspomnieć, że w niektórych przypadkach jest niemożliwym, by stabilizować jakiś zadany układ przy użyciu ciągłego sygnału kontrolnego, a przerywany (przełączany) sygnał kontrolny umożliwia osiągnięcie stabilności. W szczególności w [86] zostało udowodnione, że kontrola przy użyciu sprzężenia zwrotnego, ciągła w czasie i rozszerzona względem opóźnienia czasowego nie może być wykorzystana, by doprowadzić do stabilizacji niestabilnego cyklu granicznego. W przeciwnieństwie, kontrola z przełączaniem przy użyciu sprzężenia zwrotnego i rozszerzona względem opóźnienia czasowego może być wykorzystana do stabilizacji niestabilnego cyklu granicznego. Ten wynik wskazuje, że do osiągnięcia stabilności, w pewnych warunkach, może być koniecznym zastosowanie przerywanego (przełączanego) sygnału kontrolnego.

Wyniki badań opublikowane w [KO11,KO12,KO13,KO14,KO15] są związane z modelowaniem matematycznym oraz charakterem układu kontroli neuromotorycznej człowieka dla różnych zadań takich jak spokojne stanie czy wspomniane wcześniej śledzenie celu. W szczególności w [KO11], zaproponowaliśmy modelowanie układu neuromotorycznego w czasie spokojnego stania człowieka jako odwrócone wahadło a równowaga jest osiągnięta przy użyciu liniowego układu kontrolnego z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Układ kontrolny charakteryzuje się również opóźnieniem czasowym w celu zamodelowania opóźnień wynikających z czasu przesyłania sygnału nerwowego oraz aktywacji mięśni. Model charakteryzuje się również obecnością wartości progowej poniżej, której sygnał neuromotoryczny nie jest w stanie określić czy środek masy jest odchyłony od wymaganej wartości pionowej; istnienie wartości progowej można interpretować jako minimalną wartość odchylenia kąтового, które może być określone przez układ neuromotoryczny a więc jest to opis dokładności układu neuromotorycznego w detekcji odchylenia. W ten sposób otrzymaliśmy planarny układ Filippowa z opóźnieniem czasowym i symetrią. Okazało się, że do osiągnięcia stabilizacji, która jest postrzegana jako „małe” oscylacje względem pionu jest koniecznym wykorzystanie sygnału położenia i prędkości w układzie kontrolnym. Odkryte oscylacje wydają się wierniej odzwierciedlać rzeczywiste osiągnięcie stanu równowagi niż istnienie stabilnych punktów węzłowych [74].

Następnie zbadaliśmy efekt zmiany parametrów na istnienie znalezionych cykli granicznych. Parametryczna analiza bifurkacyjna doprowadziła do odkrycia istnienia w układzie wielu atraktorów cyklicznych dla tych samych wartości parametrów. W szczególności dla znacznego zakresu wartości parametru odpowiadającego sygnałowi prędkości w użytym układzie kontrolnym. W układzie odkryliśmy również bifurkację homokliniczną, która prowadzi do powstania w układzie symetrycznego cyklu granicznego o długim okresie. Przeprowadziliśmy również eksperyment numeryczny dla cyklu granicznego istniejącego dla wartości parametrów w bliskim otoczeniu wartości parametrów, dla których zaobserwowaliśmy bifurkację homokliniczną. W wyniku eksperymentu okazało się, że dodanie szumu Gaussowskiego prowadzi do przełączania się układu pomiędzy rejonami, w których istnieją stabilne symetryczne cykle graniczne (gdy szum jest zignorowany), co prowadzi do wyraźnej bi-stabilności. Innymi słowy, układ z szumem Gaussowskim przez jakiś czas podlega ewolucji w rejonie istnienia jednego atraktora, po czym następuje przełączenie do ewolucji w rejonie gdzie istnieje drugi atraktor i znów

przełączenie w rejonie pierwszego atraktora itd. Powyższy scenariusz może wytłumaczyć przełączanie pomiędzy parą asymetrycznych atraktorów zaobserwowane w układzie pierwszego rzędu w [42], które zostało wykorzystane do wytłumaczenia obecności rejonów różnego skalowania zaobserwowanego przy analizie danych eksperymentalnych ruchu wahadłowego środka masy w trakcie spokojnego stania zdrowego człowieka.

Badania opisane powyżej, które były prowadzone wspólnie z eksperymentalistami pracującymi nad zrozumieniem kontroli układu neuromotorycznej przy wykonywaniu różnego rodzaju zadań przez zdrowego człowieka prowadziła do kolejnych badań, które miały następujące cele: 1. zbadanie zachowania dynamicznego modeli z przełączaniem układu neuromotorycznego człowieka dla zadań takich jak spokojne stanie i śledzenie celu; 2. określenie, przy użyciu metod z analizy danych, czy układy z nieciągłościami wierniej opisują zachowanie układu neuromotorycznego dla wspomnianych zadań niż istniejące ciągle modele liniowe. W szczególności, wynikiem wspomnianej współpracy było otrzymanie grantu naukowego zatytułowanego „Gwałtowne zmiany zachowania układów hybrydowych w wyniku bifurkacji typu DIB z wielkoma atraktorami”, który został ufundowany przez EPSRC w ramach programu „First Grant Scheme”, numer referencyjny EP/K001353/1, ze mną jako głównym prowadzącym. Wartość grantu wyniosła 125 000£ (około 600 000 PLN). Badania prowadzone w ramach grantu odbywały się od pierwszego lutego 2013 do 31. sierpnia 2014. W wyniku badań prowadzonych z grantu powstały cztery artykuły w referowanych publikacjach [KO12-KO15] i jeden artykuł opublikowany w materiałach konferencyjnych. Istotną kontrybucją naukową, która powstała na bazie grantu było rozwinięcie algorytmu do detekcji nieciągłości w zasumionych danych. Algorytm został wykorzystany do analizy posturograficznych danych eksperymentalnych i potwierdził istnienie kontroli przełączanej układu neuromotorycznego zdrowego człowieka w czasie spokojnego stania [KO15]. Co więcej, badania przeprowadzone w czasie trwania grantu nasunęły dodatkowe istotne pytania badawcze. Taką istotną nową kwestią jest zbadanie powiązanie pomiędzy zmianą stragi kontroli układu neuromotorycznego a bifurkacjami typu DIB, co doprowadziło do powstania omówionej już publikacji [K1].

W [KO12] badaliśmy czy ARMA model może być dopasowany do procesu charakteryzującego się nieciągłościami. W szczególności przeprowadziliśmy następujący test: wygenerowaliśmy sygnał czasowy ze znanego układu LTI oraz z układu nieliniowego (z wartością progową i strefą martwą), które były modelami kontroli neuromotorycznej człowieka dla spokojnego stania i analizowaliśmy sygnał wyjściowy przy pomocy modeli ARMA. Pokazaliśmy, że dla obydwu klas układów można dopasować modele ARMA niskiego rzędu przy użyciu standardowych kryteriów. By zweryfikować czy istnieją jakiegóż widoczne efekty sterfy martwej na sygnał wyjściowy, porównaliśmy widma (fizycznie jako wielkość mocy) obydwu układów z widmami odpowiadającym ich modelom ARMA. Następnie zbadaliśmy właściwości widm trzech sygnałów posturograficznych i odpowiadających im modeli ARMA i porównaliśmy z widmami otrzymanymi z naszych dwóch jawnych układów. Ostatecznie zbadaliśmy zachowanie dynamiczne naszych jawnych układów bez sygnału szumu Gaussowskiego, by określić jaki jest efekt istnienia wartości progowej (strefy martwej) na zachowanie asymptotyczne. Przy porównaniu widm mocy układów jawnych odpowiadającymi im widmami modeli ARMA w obydwu przypadkach otrzymaliśmy dopasowanie dla niskich częstotliwości (do około 2Hz). Utrata dopasowania wystąpiła dla wyższych częstotliwości. Jest to zgodne z teorią ponieważ modele ARMA niskiego rzędu zapewniają dopasowanie dla małych częstotliwości. Co więcej, nie zaobserwowaliśmy widocznych jakościowych różnic dla rozważanych układów. Następnie porównaliśmy widma mocy trzech modeli ARMA dopasowanych to trzech sygnałów danych posturograficznych ze spektremi modeli układów jawnych. Podobnie jak wcześniej otrzymaliśmy dopasowanie dla niskich częstotliwości (do wartości około 1.5Hz) z rosnącym brakiem dopasowania dla wyższych częstotliwości. Z powyższego eksperymentu numerycznego wynika, że modelowanie ARMA może prowadzić to pewnej nadinterpretacji wyników. To znaczy, dopasowanie danych do modelu ARMA nie gwarantuje, że procesy które wygenerowały dane są rzeczywiście procesami liniowymi niezmiennymi względem czasu. Badaliśmy również zachowanie dynamiczne modelowych układów bez szumu Gaussowskiego. Odkryliśmy jakościowe różnice w zachowaniu asymptotycznym dla wykorzystanych wartości parametrów. Tzn. zachowanie dynamiczne układu liniowego (bez szumu) odpowiadało zbieżności do stanu stabilnego węzła. Natomiast asymptotyczne zachowanie dynamiczne układu z przełączaniem odpowiada ewolucji na jednym z dwóch cykli

granicznych, w zależności od zadanych warunków początkowych.

W [KO13] zaproponowaliśmy algorytm umożliwiający detekcję gwałtownych zmian w danych czasowych oscylatora typu Van der Pola z dodanym szumem Gausowskim. Korzyść wynikająca z zaproponowanego przez nas algorytmu wynika z tego, że dzięki algorytmowi możemy rozbić dane na zbiór niezależnych współczynników (mono-współczynników lub mono-komponentów) odpowiadających ortogonalnym funkcjom bazowym. Następnie te mono-komponenty są analizowane i ponownie składane w sygnał zawierający tzw. natychmiastowe częstotliwości bez sygnału, który odpowiada asymptotycznej odpowiedzi układu i nie zawiera sygnału szumu. Otrzymany sygnał wyjściowy jest szeregiem impulsów o skończonych wartościach gdzie każdy impuls odpowiada momentowi, gdy sygnał układu gwałtownie się zmieniał (w dziedzinie czasu). Wydajność zaproponowanego algorytmu do detekcji tego rodzaju zmian w przebiegach czasowych wynika z faktu, że przy pomocy zaproponowanego algorytmu mogą one zostać przekształcone w łatwo czytelne impulsy na płaszczyźnie czasowo-częstotliwościowej. Zaproponowana metoda jest obiecująca nie tylko do wykrywania w zaszumionych przebiegach czasowych gwałtownych zmian, lecz również może być użyta do wykrywania nieciągłości odszumionego sygnału. Nieciągłości, o których mowa i które nas interesują z punktu widzenia modelowania matematycznego, dotyczą nieciągłości wynikających z przełączania w układzie pomiędzy gładkimi polami wektorowymi.

W [KO14] przeprowadzaliśmy badania numeryczne układu z przełączaniem modelującego kontrolę spokojnego stania człowieka. Zastosowaliśmy trzy rodzaje metod analitycznych do analizy przebiegów czasowych wygenerowanych za pomocą naszych modeli. Rozpoczęliśmy naszą analizę od zbadania zachowania dynamicznego modeli deterministycznych (bez dodanego szumu Gausowskiego) dla wartości parametrów odpowiadających eksperymentowi analizującemu spokojne stanie człowieka. Zachowanie asymptotyczne prowadzi do ewolucji na cyklu granicznym. Następnie zastosowaliśmy opisany wcześniej algorytm, by dla przebiegów czasowych generowanych przez model znaleźć momenty przełączeń układu. Otrzymaliśmy impulsy na płaszczyźnie czasowo-częstotliwościowej dla analizowanych przebiegów czasowych, które wskazały na istnienie przełączeń/nieciągłości w układzie generującym dane przebiegi. Co więcej, dla małych opóźnień czasowych otrzymane impulsy charakteryzowały się mniejszą amplitudą niż dla większych opóźnień czasowych. Wydłużone opóźnienia czasowe mogą być interpretowane jako rozszerzenie przedziału strefy martwej. Z czego wynika istnienie korelacji pomiędzy obliczonymi impulsami określającymi natychmiastową częstotliwość i szerokością strefy martwej. Następnie zastosowaliśmy analizę entropijną w celu zbadania tzw. miary złożoności układu (complexity measure w języku angielskim). Okazało się, że złożoność układu jest zwiększona, gdy sygnał szumu jest wyłączony. Przypuszczamy, że pewnien poziom szumu „wygładza” nieciągłości i przez to zmniejsza złożoność układu. Znaleźliśmy również dodatnią korelację pomiędzy zwiększoną długością opóźnienia czasowego (co może być interpretowane jako poszerzenie strefy w modelu) i złożonością układu. Zastosowaliśmy również analizę fluktuacyjną do pomiaru złożoności układu. Wyniki wskazują, że miara złożoności ulega zwiększeniu jeżeli zwiększeniu ulega opóźnienie czasowe bądź szerokość strefy martwej. Ostatecznie przeprowadziliśmy analizę entropijną i fluktuacyjną na posturograficznych danych eksperymentalnych. Otrzymane wyniki pokazały, że miara złożoności danych eksperymentalnych odpowiada ruchom Browna i jest podobna do miary złożoności dla układu z przełączaniem i szumem dla wartości opóźnienia układu neuromotorycznego wielkości $\tau = 150\text{ms}$, co jest wielkością fizjologiczną. Uważamy, że istnieje bezpośrednia korelacja pomiędzy rozmiarem strefy martwej, opóźnieniem czasowym w układzie z przełączaniem i odpowiadającą takiej strukturze miarą złożoności układu. Z tego względu przedstawione wyniki mogą zawierać istotne informacje na temat układu neuromotorycznego kontrolującego zachowanie równowagi u ludzi podczas spokojnego stania.

Współpraca międzynarodowa - układy dynamiczne i automatyka

Prowadzę współpracę z Prof. Paul Glendinning z University of Manchester, której tematyka to modelowanie matematyczne kontroli układu neuromotorycznego u ludzi oraz analiza zachowania dynamicznego układów kawałkami gładkich. Prof. Glendinning jest ekspertem w dziedzinie analizy i bifurkacji w dyskretnych układach dynamicznych, które pojawiają się w naturalny sposób podczas redukcji układów Filippowa do form normalnych. Prowadzę również współpracę z Dr Arne Nordmark z Royal Institute of Technology (Szwecja, Sztokholm) na temat analizy bifurkacji typu DIB w ukła-

dach kawałkami gładkich. Interesuje mnie również powiązanie pomiędzy bifurkacjami DIB a kontrolą układów z przełączaniem i opóźnieniem czasowym. Ta tematyka jest elementem mojej współpracy z Dr Jan Siberem z the University of Exeter.

Inne publikacje w czasopismach naukowych Dr Piotra Kowalczyka

- [KO1] M. di Bernardo, P. Kowalczyk and A. B. Nordmark. Bifurcations of dynamical systems with sliding: derivation of normal-form mappings. *Physica D*, 170:175-205, 2002.
- [KO2] M. di Bernardo, P. Kowalczyk, and A. B. Nordmark. Sliding bifurcations: A novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry-friction oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(10):2935-2948, 2003.
- [KO3] P. Kowalczyk. Robust chaos and border-collision bifurcations in non-invertible piecewise-linear maps. *Nonlinearity*, 18:485-504, 2005.
- [KO4] A. Colombo, M. di Bernardo, J. Hogan and P. Kowalczyk. Complex dynamics in a relay feedback system with hysteresis and delay. *Journal of Nonlinear Science*, 17(2):85-108, 2007.
- [KO5] M. di Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys, P. Kowalczyk, A. B. Nordmark, G. Olivari and P.T. Piironen. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems. *SIAM Review*, 50(4):629-701, 2008.
- [KO6] P. Glendinning and P. Kowalczyk. Dynamics of a hybrid thermostat model with discrete sampling time control. *Dynamical Systems*, 24(3):343-360, 2009.
- [KO7] J. Sieber, P. Kowalczyk, S.J. Hogan and M. di Bernardo. Dynamics of symmetric dynamical systems with delayed switching. *Special Issue of Journal of Vibration and Control on Dynamics and Control of Systems with Time-Delay*, 16(7-8), 2010.
- [KO8] J. Sieber and P. Kowalczyk. Small-scale instabilities in dynamical systems with sliding. *Physica D*, 239(1-2):44-57, 2010.
- [KO9] P. Glendinning and P. Kowalczyk. Micro-chaotic dynamics due to digital sampling in hybrid systems of Filippov type. *Physica D*, 239(1-2):58-71, (2010).
- [KO10] P. Kowalczyk and P. Glendinning. Boundary-equilibrium bifurcations in piecewise-smooth slow-fast systems. *Chaos: An interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2011.
- [KO11] P. Kowalczyk, P. Glendinning, Martin Brown, Gustavo Medrano-Cerda, Houman Dallali and Jonathan Shapiro. Modelling human balance using switched systems with linear feedback control. *Interdisciplinary Journal of the Royal Society Interface*, 2011.
- [KO12] P. Kowalczyk, S. Nema, P. Glendinning, I. Loram and M. Brown. ARMA analysis of linear and discontinuous models of human balance during quiet standing. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2014.
- [KO13] S. Nema and P. Kowalczyk. Detecting abrupt changes in a noisy Van der Pol type oscillator. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2015.
- [KO14] S. Nema, P. Kowalczyk and I. Loram. Complexity and dynamics of switched human balance during quiet standing. *Biological Cybernetics*, 2016.
- [KO15] S. Nema, P. Kowalczyk and I. Loram. Wavelet-frequency analysis for the detection of discontinuities in switched system models of human balance. *Human Movement Science*, 2016.

Referowane publikacje w materiałach konferencyjnych Dr Piotra Kowalczyka

- [KOCf1] M. di Bernardo and P. Kowalczyk. On a novel class of bifurcations in hybrid dynamical systems – the case of relay feedback system. *In Proceedings of 4th International Workshop on Hybrid Systems Computation and Control*, Springer-Verlag, pp. 361-374, 2001.
- [KOCf2] M. di Bernardo and P. Kowalczyk. On the existence of stable asymmetric limit cycles and chaos in unforced symmetric relay feedback system. *In Proceeding to European Control Conference*, Porto 2001.
- [KOCf3] J. Sieber and P. Kowalczyk. Event collisions in systems with delayed switches. *In Proceedings of the 6th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, L'Aquila, Italy, 2006.
- [KOCf4] J. Sieber and P. Kowalczyk. Symmetric event collisions in dynamical systems with delayed switches. *Special issue of "Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B" of Proceedings of the sixth AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Poitiers 2007.

- [KOCf5] Samia K. Genena, Daniel J. Pagano and P. Kowalczyk. HOSM Control of Stick-Slip Oscillations in Oil Well Drillstrings. *In Proceeding to European Control Conference*, Kos, 2007.
- [KOCf6] P. Kowalczyk. Grazing bifurcations: A mechanism for the sudden onset of robust chaos. *In Proceedings of the 10th Experimental Chaos Conference*, Catania, 2008.
- [KOCf7] P. Kowalczyk and A. B. Nordmark. Bifurcations in non-smooth models of mechanical systems. *In Proceeding of EUROMECH 500 conference on Non-smooth Problems in Vehicle Systems Dynamics - Analysis and Solutions*, Lingby, 2008.
- [KOCf8] P. Kowalczyk and J. Sieber. Robustness of grazing-sliding bifurcations in Filippov type systems. *In the proceedings of Second IFAC meeting related to analysis and control of chaotic systems*, London, 2009.
- [KOCf9] P. Kowalczyk, P. Glendinning. Micro-chaos in Relay Feedback Systems with Bang-Bang Control and Digital Sampling. *In Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control*, Milan, 2011.

Monografie i rozdziały w książkach

- [KB1] M. di Bernardo, A.R. Champneys, P. Kowalczyk. Corner-Collision and Grazing-Sliding: practical examples of border-collision bifurcations. *Proceedings of the IUTAM Symposium on Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics*, Kluwer Academic, 2003.
- [KB2] M. di Bernardo, A. R. Champneys, C. Budd and P. Kowalczyk. Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. *Springer*, 2008.

Literatura

- [1] K. J. Åström. Oscillations in systems with relay feedback. In K. J. Åström, G. C. Goodwin, and P. R. Kumar, editors, *Adaptive Control, Filtering, and Signal Processing*, volume 74 of *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 1–25. Springer-Verlag, 1995.
- [2] J Adolfsson, H Dankowicz, and A Nordmark. 3D passive walkers: Finding periodic gaits in the presence of discontinuities. *Nonlinear Dynamics*, pages 205–229, 2001.
- [3] M. A. Aizerman and F. R. Gantmakher. On the stability of periodic motions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, pages 1065–1078, 1958.
- [4] M. A. Aizerman and E. S. Pyatnitskii. Foundations of a theory of discontinuous systems. I–II. *Automation and Remote Control*, 35(7):1066–1079, 1242–1262, 1974.
- [5] Marat Akhmet and Ardak Kashkynbayev. *Hopf Bifurcation in Filippov Systems*, pages 65–96. Springer Singapore, Singapore, 2017.
- [6] D. Amrani and D. P. Atherton. Designing autonomous relay systems with chaotic motion. In *Proc. 28th IEEE Conf. on Decision and Control*, volume 1, pages 932–936, Tampa, FL, 1989.
- [7] D. V. Anosov. Stability of the equilibrium positions in relay systems. *Automation and Remote Control*, 20:135–149, 1959.
- [8] Y Asai, Y Tasaka, K Nomura, T Nomura, M Casadio, and P Morasso. A model of postural control in quiet standing: robust compensation of delay-induced instability using intermittent activation of feedback control. *PLoS ONE art. no. e6169*, (7), 2009.
- [9] D. P. Atherton. *Nonlinear Control Engineering: Describing Function Analysis and Design*. Van Nostrand Reinhold Co., London, U.K., 1975.
- [10] V. I. Babitskii. *Theory of Vibroimpact Systems. Approximate methods*. Nauka, Moscow, 1978.
- [11] V.I. Babitsky and A.M. Vepruk. Universal bumpered vibration isolator for severe environment. *J. Sound Vib.*, 218:269–292, 1998.

- [12] S Banerjee and C Grebogi. Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth-maps. *Physical Review E*, pages 4052–4061, 1999.
- [13] S. Banerjee, J. A Yorke, and C. Grebogi. Robust chaos. *Physical Review Lett*, 80:3049–3052, 1998.
- [14] S. Barnett and R. G. Cameron. *Introduction to Mathematical Control Theory*. Oxford University Press, 1985.
- [15] Halliwell NA Batako AD, Babitsky VI. A self-excited system for percussive-rotary drilling. *J. Sound Vib.*, 259, 2003.
- [16] W. L. Brogan. *Modern Control Theory*. Prentice-Hall, 1991.
- [17] C Budd, KA Cliffe, and F Dux. The effect of frequency and clearance variations on one-degree of freedom impact oscillators. *J. Sound & Vibration*, 1995.
- [18] CJ Budd and F Dux. Chattering and related behaviour in impact oscillators. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, pages 365–389, 1994.
- [19] CJ Budd and F Dux. Intermittency in impact oscillators close to resonance. *Nonlinearity*, pages 1191–1224, 1994.
- [20] V. Carmona, E. Freire, E. Ponce, and F. Torres. Bifurcation of invariant cones in piecewise linear homogeneous systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, (15(8)):2469–2484, 2005.
- [21] W Chin, E Ott, HE Nusse, and C Grebogi. Grazing bifurcations in impact oscillators. *Physical Review E*, pages 4427–4444, 1994.
- [22] A. Colombo and F. Dercole. Discontinuity induced bifurcations of nonhyperbolic cycles in nonsmooth systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 9(1):62–83, 2010.
- [23] A. Colombo, M. di Bernardo, S.J. Hogan, and M.R. Jeffrey. Bifurcations of piecewise smooth flows: Perspectives, methodologies and open problems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):1845 – 1860, 2012. Dynamics and Bifurcations of Nonsmooth Systems.
- [24] S. Coombes, R. Thul, and K.C.A. Wedgwood. Nonsmooth dynamics in spiking neuron models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):2042 – 2057, 2012. Dynamics and Bifurcations of Nonsmooth Systems.
- [25] H. Dankowicz and A. B. Nordmark. On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations. *Physica D*, 136:280–302, 1999.
- [26] H. Dankowicz, P.T. Piiroinen, and A.B. Nordmark. Low-velocity impacts of quasiperiodic oscillations. *Chaos Solitons & Fractals*, 14:241–255, 2002.
- [27] H. Dankowicz and F. Schilder. Recipes for continuation. *Reference and Research Book News*, 28(4), 08 2013. Copyright - Copyright Book News, Inc. Aug 2013; Last updated - 2013-10-30.
- [28] H. Dankowicz and G. Thakur. A newton method for locating invariant tori of maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Science and Engineering*, 16(5):1491–1503, 2006.
- [29] F. Della Rossa and F. Dercole. Generalized boundary equilibria in n-dimensional Filippov systems: The transition between persistence and nonsmooth-fold scenarios. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 241:1903–1910, November 2012.
- [30] F. Dercole and Y. A. Kuznetsov. Slidecont: An auto97 driver for bifurcation analysis of filippov systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31(1):95–119, 2005. Cited By :49.

- [31] Fabio Dercole and Yuri A. Kuznetsov. Slidecont: An auto97 driver for bifurcation analysis of filippov systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 31(1):95–119, March 2005.
- [32] A. Dhooge, W. Govaerts, and Yu. A. Kuznetsov. Matcont: A matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 29:141–164, 2003.
- [33] M. di Bernardo, M. I. Feigin, S. J. Hogan, and M. E. Homer. Local analysis of C-bifurcations in n -dimensional piecewise smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 10:1881–1908, 1999.
- [34] M. di Bernardo and S. J. Hogan. Discontinuity-induced bifurcations of piecewise smooth dynamical systems. *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences*, 368:4915–4935, 2010.
- [35] M. di Bernardo, A. Nordmark, and G. Olivar. Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise-smooth and impacting dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(1):119 – 136, 2008.
- [36] P. Diamond, N. Kuznetsov, and D. Rachinskii. On the hopf bifurcation in control systems with a bounded nonlinearity asymptotically homogeneous at infinity. *Journal of Differential Equations*, 175(1):1 – 26, 2001.
- [37] S. H. Doole and S. J. Hogan. A piecewise linear suspension bridge model: nonlinear dynamics and orbit continuation. *Dynamics and Stability of Systems*, 11:19–29, 1996.
- [38] Mitrajit Dutta, Helena E. Nusse, Edward Ott, James A. Yorke, and Guohui Yuan. Multiple attractor bifurcations: A source of unpredictability in piecewise smooth systems. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4281–4284, Nov 1999.
- [39] Partha Sharathi Dutta and Soumitro Banerjee. Period increment cascades in a discontinuous map with square-root singularity*. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(7):160 – 165, 2009. 2nd IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems.
- [40] G. Stépán E. Enikov. Micro-chaotic motion of digitally controlled machines. *Journal of Vibrations and Control*, 4:427–443, 1998.
- [41] T. F. Fairgrieve E. J. Doedel, A. R. Champneys and Yu. A. Kuznetsov. *Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. Concordia University, 1998.
- [42] Christian. W. Eurich and John G. Milton. Noise-induced transitions in human postural sway. *Phys. Rev. E*, 54:6681–6684, Dec 1996.
- [43] Neil Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 31(1):53 – 98, 1979.
- [44] S. Fernandez-Garcia, D. A. Garcia, G. O. Tost, M. di Bernardo, and M. R. Jeffrey. Structural stability of the two-fold singularity. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 11(4):1215–1230, 2012. Copyright - © 2012, Society for Industrial and Applied Mathematics; Last updated - 2012-12-20.
- [45] M. H. Frederiksson and A. B. Nordmark. Bifuractions caused by grazing incidence in many degrees of freedom impact oscillators. *Proc. Royal Soc. Lond. A*, pages 1261–1276, 1997.
- [46] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo, and F. Torres. Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, (8(11)):2073–2097, 1998.

- [47] G. Stépán G. Haller. Micro-chaos in digital control. *Journal of Nonlinear Science*, 6:415–448, 1996.
- [48] P Gawthrop, I Loram, M Lakie, and H Gollee. Intermittent control: a computational theory of human control. *Biological Cybernetics*, pages 31–51, 2011.
- [49] Peter Gawthrop, Ian Loram, Henrik Gollee, and Martin Lakie. Intermittent control models of human standing: similarities and differences. *Biological Cybernetics*, 108(2):159 – 168, 2014.
- [50] Paul Glendinning and Mike Jeffrey. Grazing-sliding bifurcations, border collision maps and the curse of dimensionality for piecewise smooth bifurcation theory. 28, 01 2015.
- [51] Paul Glendinning and Chi Hong Wong. Border collision bifurcations, snap-back repellers, and chaos. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 79 2 Pt 2:025202, 2009.
- [52] Willy Govaerts, Yuri A. Kuznetsov, and Annick Dhooge. Numerical continuation of bifurcations of limit cycles in matlab. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(1):231, 2005.
- [53] M. Guardia, T.M. Seara, and M.A. Teixeira. Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems. *Journal of Differential Equations*, 250(4):1967 – 2023, 2011.
- [54] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer–Verlag, New York, 1983. Applied Mathematical Sciences, Volume 42.
- [55] A.P. Ivanov. Impact oscillations: linear theory of stability and bifurcations. *J. Sound Vib.*, 178:361–378, 1994.
- [56] V.I. Utkin J. Guldner and J. Ackermann. Sliding mode control approach to automatic car steering. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1969–1973, 1994.
- [57] David J. W. Simpson. Scaling laws for large numbers of coexisting attracting periodic solutions in the border-collision normal form. 24, 03 2014.
- [58] J. Jeka, T. Kiemel, R. Creath, F. Horak, and R. Peterka. Controlling human upright posture: Velocity information is more accurate than position or acceleration. *Journal of Neurophysiology*, pages 2368 – 2379, 2004.
- [59] Haibo Jiang, Antonio S.E. Chong, Yoshisuke Ueda, and Marian Wiercigroch. Grazing-induced bifurcations in impact oscillators with elastic and rigid constraints. *International Journal of Mechanical Sciences*, 127:204 – 214, 2017. Special Issue from International Conference on Engineering Vibration - ICoEV 2015.
- [60] T. Kiemel, K. S. Oie, and J. J. Jeka. Multisensory fusion and the stochastic structure of postural sway. *Biological Cybernetics*, pages 262–277, 2002.
- [61] C. B. Kuo. *Digital Control Systems*. Saunders College Publishing, Fort Worth, London, 1992.
- [62] Yu. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer–Verlag, New York, second edition, 1998. Applied Mathematical Sciences, Volume 112.
- [63] Yu.A. Kuznetsov, S. Rinaldi, and A. Gragnani. One-parameter bifurcations in planar filippov systems. *Int. J. Bifurcation Chaos*, pages 2157–2188, 2003.
- [64] R.I. Leine and H. Nijmeijer. *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

- [65] Yongbao Liu, Qiang Wang, and Huidong Xu. Bifurcations of periodic motion in a three-degree-of-freedom vibro-impact system with clearance. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 48:1 – 17, 2017.
- [66] Jaume Llibre and Enrique Ponce. Bifurcation of a periodic orbit from infinity in planar piecewise linear vector fields. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 36(5):623 – 653, 1999.
- [67] I. Loram. *Postural Control and Sensorimotor Integration*. In Grievies Modern Musculoskeletal Physiotherapy edited by Jull GA, Moore A, Falla D, Lewis J, McCarthy C, and Sterling MElsevier, 2015.
- [68] I. Loram, R. Cunningham, J. Zenzeri, and H. Gollee. Intermittent control of unstable multivariate systems with uncertain system parameters. In *2016 38th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, pages 17–20, Aug 2016.
- [69] I. Loram, P. Gawthrop, and H. Gollee. Intermittent control of unstable multivariate systems. In *2015 37th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, pages 1436–1439, Aug 2015.
- [70] I. D. Loram, C. N. Maganaris, and M. Lakie. Active, non-spring-like muscle movements in human postural sway: how might paradoxical changes in muscle length be produced. *Journal of Physiology*, pages 281–293, 2005.
- [71] T. M. Seara M. Guardia, S. J. Hogan. An analytical approach to codimension-2 sliding bifurcations in the dry-friction oscillator. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 9(3):369 – 798, 2010.
- [72] Oleg Makarenkov and Jeroen S.W. Lamb. Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):1826 – 1844, 2012. Dynamics and Bifurcations of Nonsmooth Systems.
- [73] J.F. Mason, N. Humphries, and P.T. Piiroinen. Numerical analysis of codimension-one, -two and -three bifurcations in a periodically-forced impact oscillator with two discontinuity surfaces. *Mathematics and Computers in Simulation*, 95:98 – 110, 2014. Discontinuous Differential Systems : Theory and Numerical Methods.
- [74] John Milton, Juan Luis Cabrera, Toru Ohira, Shigeru Tajima, Yukinori Tonosaki, Christian W. Eurich, and Sue Ann Campbell. The time-delayed inverted pendulum: Implications for human balance control. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(2):026110, 2009.
- [75] A. B. Nordmark. Non-periodic motion caused by grazing incidence in impact oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, pages 279–297, 1991.
- [76] Arne Nordmark, Harry Dankowicz, and Alan Champneys. Discontinuity-induced bifurcations in systems with impacts and friction: Discontinuities in the impact law. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(10):1011 – 1023, 2009.
- [77] L. E. Nusse and J. A. Yorke. Border collision bifurcation: an explanation for observed bifurcation phenomena. *Physical Review E*, pages 1073–1076, 1994.
- [78] P. T. Piiroinen, L. N. Virgin, and A. R. Champneys. Chaos and period-adding; experimental and numerical verification of the grazing bifurcation. *Journal of Nonlinear Science*, 14(4):383–404, Aug 2004.
- [79] A. Potapov and M. K. Ali. Chaotic neural control. *Phys. Rev. E*, 63:046215, Mar 2001.
- [80] C. A. Rabbath and N. Hori. A framework for discrete-time models of continuous-time systems. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2578–2583, 2001.

- [81] B. Santhosh, S. Narayanan, and C. Padmanabhan. Discontinuity induced bifurcations in nonlinear systems. *Procedia IUTAM*, 19:219 – 227, 2016. IUTAM Symposium Analytical Methods in Nonlinear Dynamics.
- [82] Osinga H. M. Schilder, F. and W. Vogt. Continuation of quasi-periodic invariant tori. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 4(3):459–488, 2005.
- [83] R. Seydel. *From equilibrium to chaos: practical stability analysis*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [84] S. W. Shaw and P. J. Holmes. Periodically forced linear oscillator with impacts: Chaos and long-period motions. *Phys. Rev. Lett.*, 51:623–626, 1983.
- [85] J. Sieber. Dynamics of delayed relay systems. *Nonlinearity*, 19(11):2489–2527, 2006.
- [86] J. Sieber. Generic stabilizability for time-delayed feedback control. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472(2189), 2016.
- [87] D. J. W. Simpson, R. Kuske, and Y.-X. Li. Dynamics of simple balancing models with time-delayed switching feedback control. *Journal of Nonlinear Science*, 22(2):135–167, Apr 2012.
- [88] D. J. W. Simpson and J. D. Meiss. Unfolding a codimension-two, discontinuous, andronov–hopf bifurcation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(3):033125, 2008.
- [89] David J. W. Simpson. Grazing-sliding bifurcations creating infinitely many attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(12):1730042, 2017.
- [90] D.J.W. Simpson, D.S. Kompala, and J.D. Meiss. Discontinuity induced bifurcations in a model of *saccharomyces cerevisiae*. *Mathematical Biosciences*, 218(1):40 – 49, 2009.
- [91] Iryna Sushko, Laura Gardini, and Kiminori Matsuyama. Robust chaos in a credit cycle model defined by a one-dimensional piecewise smooth map. *Chaos, Solitons and Fractals*, 91:299 – 309, 2016.
- [92] R. Szalai and H. Osinga. Arnold’s tongues arising from a grazing-sliding bifurcation. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8(4):1434–1461, 2009.
- [93] P. Thota, Xi. Zhao, and H. Dankowicz. Co-dimension-two grazing bifurcations in single-degree-of-freedom impact oscillators. 2, 01 2007.
- [94] Phanikrishna Thota and Harry Dankowicz. Continuous and discontinuous grazing bifurcations in impacting oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 214(2):187 – 197, 2006.
- [95] G. S. Whiston. Global dynamics of a vibro-impacting linear oscillator. *J. Sound Vib.*, 118:395–429, 1987.
- [96] G. S. Whiston. The vibro-impact response of a harmonically excited and preloaded one-dimensional linear oscillator. *J. Sound Vib.*, 115:303–324, 1987.
- [97] Deng S Wen G. Yin S, Ji J. Neimark-sacker bifurcations near degenerate grazing point in a two degree-of-freedom impact oscillator. *ASME. Journal of Computational Nonlinear Dynamics*, 13.
- [98] Y. Yoshitake and A. Sueoka. Forced self-excited vibration with dry friction. ‘*From Applied Nonlinear Dynamics and Chaos of Mechanical Systems With Discontinuities, Series in Nonlinear Science, Editors Marian Wiercigroch and Bram de Kraker, Series a*, pages 237–260, 2000.
- [99] G. Yuan, S. Banerjee, E. Ott, and J. A. Yorke. Border-collision bifurcations in the buck converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 45:707–716, 1998.

- [100] Yongxiang Zhang and Guanwei Luo. Multistability of a three-degree-of-freedom vibro-impact system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 57:331 – 341, 2018.
- [101] Y. Zou, T. Kupper, and W. J. Beyn. Generalized hopf bifurcation for planar filippov systems continuous at the origin. *Journal of Nonlinear Science*, 16(2):159–177, Apr 2006.

P. Kowalczyk