Autoreferat

Optymalne zatrzymywanie procesów iterowanych oraz procesów z ukrytą informacją

Małgorzata Kuchta

Wrocław, 2023

Imię i nazwisko: Małgorzata Kuchta

Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

doktor nauk matematycznych, 1998, Politechnika Wrocławska
tytuł rozprawy: "Kwadratowe nierówności całkowe typu Opiala"
promotor: prof. dr hab. Bronisław Florkiewicz
recenzenci: prof. dr hab. Czesław Olech, prof. dr hab. Adam Rybarski

magister matematyki, 1990, Uniwersytet Wrocławski
tytuł pracy magisterskiej: "Równanie dyfuzji w biologii"
promotor: prof. dr hab. Wojciech Okrasiński

Informacje o zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

Politechnika Wrocławska, adiunkt od 1998 roku,
asystent od 1991 do 1998 roku.

Spis treści

Rozdział 1

Osiągnięcie naukowe - tytuł i publikacje

Tytuł osiągnięcia naukowego:

"Optymalne zatrzymywanie procesów iterowanych oraz procesów z ukrytą informacją"

Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

[H1] M. Kuchta, M. Morayne. A secretary problem with many lives. Communications in Statistics -Theory and Methods, 43 (2014), 210-218.

[H2] M. Kuchta. Iterated full information secretary problem. Mathematical Methods of Operations Research, 86(2) (2017), 277-292.

[H3] M. Kuchta, M. Morayne. Monotone case for an extended process. Advances in Applied Probability, 46 (2014), 1106-1125.

[H4] E. Kubicka, G. Kubicki, M. Kuchta, M. Morayne. Maximizing survival time in a random walk on an interval. Stochastic Models, 34 (2018), 154-165.

[H5] E. Kubicka, G. Kubicki, M. Kuchta, M. Morayne. Tail probabilities of a random walk on an interval. Communications in Statistics -Theory and Methods, 50, No. 9, 2161-2169 (2021).

[H6] E. Kubicka, G. Kubicki, M. Kuchta, M. Sulkowska. An optimal algorithm for stopping on the element closest to the center of an interval. Advances in Applied Mathematics, 133 (2022), 102281, 15 p.

[H7] E. Kubicka, G. Kubicki, M. Kuchta, M. Morayne. Secretary Problem with hidden information; searching for a high merit candidate. Advances in Applied Mathematics, 144 (2023), 102468, 35 p.

Rozdział 2

Omówienie prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

2.1 Wstęp

W skład rozprawy habilitacyjnej wchodzi siedem artykułów, które łączy wspólny wątek tematyczny. Cztery prace spośród nich poświęcone są optymalnemu zatrzymywaniu procesów stochastycznych złożonych z wielu etapów. Zazwyczaj powtarzana jest ta sama gra, a decyzja o zatrzymaniu może być podjęta tylko jeden raz w czasie trwania całego wieloetapowego procesu. Wyjątkiem jest artykuł [H5], który zawiera istotny dla artykułu [H4] rezultat dotyczący spacerów losowych z barierami pochłaniającymi. Wynik ten wydawał się na tyle „ samodzielny", że został opublikowany oddzielnie.

W kolejnych dwóch artykułach [H6] i [H7] rozważane są zagadnienia optymalnego zatrzymania, gdzie obserwujący musi podjąć decyzję dotyczącą wyboru *on-line* pewnej satysfakcjonującej z jego punktu widzenia wartości liczbowej. Obserwujący jednak ma do dyspozycji tylko ograniczoną informację, tzn. nie poznaje kolejnych wartości liczbowych, lecz może porównywać w sensie nierówności „$\geq$" ukryte co do ich wartości liczby. Jest to kolejny model przybliżający opis pojawiających się realnie zagadnień. Często bowiem mamy do czynienia z porównaniem obiektów tylko co do ich relatywnej rangi, choć w istocie zależy nam na wyborze elementu o konkretnych parametrach. Prace te ([H6] i [H7]) powstały w ramach współpracy między innymi ze współautorami z University of Louisville (USA, Kentucky). Badania były prowadzone wspólnie zarówno w czasie moich staży naukowych na Uniwersytecie w Louisville, jak i wizyt naukowych Współautorów w Polsce. Ten projekt badawczy uzyskał pozytywną ocenę NCN i był częściowo finansowany z grantu NCN Grant DEC-2015/17/B/ST6/01868.

2.1.1 O historii zagadnienia

Klasycznym problemem optymalnego zatrzymania jest tzw. problem sekretarki. Polega on na tym, że ujawniane są tylko aktualne rangi przychodzących elementów uporządkowanych liniowo, a celem jest zatrzymanie się na elemencie rangi 1, czyli najmniejszym (lub największym zależnie od sformułowania problemu), z maksymalnym prawdopodobieństwem. Rozwiązanie tego problemu zostało opublikowane przez Lindleya [16] w 1961 roku. Zagadnienie to ewoluowało w wielu kierunkach i można powiedzieć, że dzisiaj stanowi ważną i bogatą w wyniki część teorii optymalnego zatrzymania. Jednym z nich była maksymalizacja nie prawdopodobieństwa wybrania elementu 1, ale wartości oczekiwanej wybranego elementu. Ten problem został rozwiązany w [3] (Y.S. Chow, S. Moriguti, H. Robins, S.M. Samuels, 1964). Od tego czasu problem sekretarki miał dwa główne warianty: maksymalizacja prawdopodobieństwa wyboru 1 lub maksymalizacja wartości oczekiwanej. Niemniej jednak, w ramach tych dwóch wariantów problem był wielokrotnie modyfikowany. Motywacja zazwyczaj była wzięta z życia. Tak było np. dla wariantu, który zakładał, że odrzuceni kandydaci są ciągle dostępni z pewnym prawdopodobieństwem w zależności od czasu jaki upłynął od przesłuchania [30] (M.C.K. Yang, 1974). Jeszcze innym wariantem jest tzw. niepewny problem zatrudnienia, w którym zakłada się, że kandydat, który został przyjęty, może odrzucić ofertę zatrudnienia [25] (M.H. Smith, 1975). Łączenia różnych wariantów były rozważane między innymi w pracy [29] (M. Tamaki, 1979/80).

Kolejne dwie wersje problemu także były motywowane przez realne zastosowania. Rezygnacja z drugiego kandydata przy dokonowaniu wyboru nie wydaje się rozsądną polityką, ponieważ należy zakładać, że i ten kandydat ma obiektywnie dużą wartość. Stąd wersja mówiąca, że wybierający odniesie sukces, jeśli trafi na jednego z dwóch najlepszych kandydatów (tzw. problem Gussein-Zade [11]) (S.M. Gusein-Zade, 1966). Inna wersja, z pozoru stanowiąca jedynie formalną wariację problemu, mianowicie uznanie za sukces wyboru dokładnie drugiego kandydata (tzw. *post-doc problem*) modeluje następującą realną sytuację: dobra, ale nie najlepsza uczelnia może sądzić, że kandydaci poszukujący pozycji złożyli podania również do innych instytucji i najlepszy kandydat zapewne otrzyma lepszą ofertę z innego miejsca; stąd lepszym wyborem jest wybór drugiego kandydata z puli [5] (P.R. Freeman, 1983).

W klasycznym problemie sekretarki elementy uporządkowane są liniowo. W niektórych uogólnieniach założenie to zastąpiono częściowym porządkiem ([27] (W. Stadje, 1980), [18] (M. Morayne, 1998), [20] (J. Preater, 1999), [6] (R. Freij, J. Wästlund, 2010) lub po prostu przez graf albo graf skierowany ([14] (G. Kubicki, M. Morayne, 2005), [21] (M. Przykucki, 2012), [1] (F.S. Benevides, M. Sulkowska, 2017)).

Rozwiązania problemu sekretarki prowadzą również do sformułowania poważnych zagadnień kombinatorycznych. Jednym z rozważanych modeli dla zbiorów częściowo uporządkowanych był model pełnego drzewa binarnego o skończonej długości [18] (M. Morayne, 1998). Sukcesem jest wybór korzenia drzewa, który jest tu jedynym maksymalnym elementem. Sytuacjami, w których taki wybór ma sens, są takie sytuacje, w których aktualny element jest jedynym maksymalnym dla porządku T utworzonego z dotychczas przebadanych elementów (w innych sytuacjach aktualny element na pewno nie jest korzeniem całego drzewa kandydatów). Diagram Hassego tego porządku jest drzewem, które też nazywamy T. Sytuacje, w których wybierający nie popełni błędu, zliczane są przez tak zwane „dobre" w sensie porządkowym poddrzewa pełnego drzewa binarnego izomorficzne z otrzymanym w danym momencie drzewem T, czyli takie, gdzie maksymalny (ostatni dotychczas otrzymany) element jest korzeniem. Natomiast sytuacje, w których zostanie popełniony błąd, zliczane są przez tak zwane „złe" w sensie porządkowym poddrzewa pełnego drzewa binarnego izomorficzne z otrzymanym w danym momencie drzewem T. Pierwszą z tych liczb nazwijmy A_T, drugą - B_T. Prawdopodobieństwo sukcesu przy wyborze elementu maksymalnego drzewa T w danym momencie, w którym ten element się pojawił, wynosi $P_T = A_T/(A_T + B_T)$. Tu już pojawia się nietrywialny problem zliczania poddrzew. Jednym z zagadnień związanych z problemem sekretarki jest tzw. problem monotoniczności, a więc pytanie, o to, czy $P_{T_2} \geq P_{T_1}$, jeśli drzewo T_2 stanowi naddrzewo drzewa T_1. Dla poddrzew binarnych pełnego drzewa binarnego odpowiedź pozytywna podana została w [13] (G. Kubicki, J. Lehel, M. Morayne, 2002), natomiast dla dowolnych poddrzew problem postawiony przez autorów poprzedniej pracy został rozwiązany negatywnie w [9] (N. Georgiou, 2005). W pracy tej podany został szereg głębokich rezultatów dotyczących zliczania zanurzeń drzew w drzewa pełne. Zagadnienia tego typu uogólnione na lasy były rozważane w [10] (B. Gittenberger, Z. Gołębiewski, I. Larcher, M. Sulkowska, 2022). Sytuacje, w których w algorytmie optymalnym dla problemu sekretarki należy na pewno dokonać wyboru, są sytuacje gdy $P_T \geq 1/2$. Tego typu nierówność badana jest także w moich pracach z J. Niemcem i M. Morayne [P5] (2005),[P8] (2009), gdzie T jest łańcuchem, a podstawowe drzewo jest dowolnym drzewem (niekoniecznie pełnym). Prace te omówione są w dalszej części tego autoreferatu.

2.2 Praca [H1]

W artykule [H1] rozważany jest następujący model. Wybierający ma do dyspozycji m serii rozmów z kandydatami. W każdej serii rozmów mamy do czynienia z warunkami opisującymi klasyczny problem sekretarki. Oznacza to, że w i-tej serii jest n_i uporządkowanych liniowo od 1 do n_i kandydatów przychodzących w pewnej permutacji (wszystkie permutacje są jednakowo prawdopodobne). Wybierający nie zna ich absolutnych pozycji, a aktualnie ocenianego kandydata może jedynie porównać z tymi kandydatami z i-tej serii, z którymi już się zapoznał.

Jeśli wybierający nie dokonał wyboru w i-tej serii, zaczyna się seria $(i+1)$-sza. Wybierający ma tylko jeden wybór w całej grze, a sukcesem jest wybranie któregokolwiek z kandydatów najlepszych w jakiejś serii. W pracy znaleziony jest optymalny czas zatrzymania przy zadanych liczbach kandydatów w kolejnych seriach $n_1, n_2, \ldots, n_m$, prawdopodobieństwo sukcesu, a także asymptotyka uzyskanych wielkości.

Poniżej podane są szczegółowe wyniki. Rozwiązanie odpowiada intuicji, że w początkowych grach wybierający dla wybrania najlepszego kandydata z większym prawdopodobieństwem (wyższym prógiem), akceptuje niepodejmowanie decyzji w danej serii i przechodzenia do następnej.

Rozważamy zbiór Y_m składający się z m łańcuchów długości odpowiednio n_i, $1 \leq i \leq m$:

$$Y_m = X_m \cup X_{m-1} \cup \ldots \cup X_1,$$

$X_i = \{x_j^{(i)} : 1 \leq j \leq n_i\}$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ dla $i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots m$. (Ze względów technicznych wygodniejsza w opisie okazała się numeracja odwrotna, co oznacza, że najpierw obserwujemy zbiór X_m, następnie X_{m-1} itd.) Zakładamy, że każdy zbiór X_i jest liniowo uporządkowany: $x_1^{(i)} \succ_i x_2^{(i)} \succ_i \ldots \succ_i x_{n_i}^{(i)}$ oraz że elemeny $x_k^{(i)}$ i $x_l^{(j)}$ nie są porównywalne, jeżeli $i \neq j$.

Przez $\mathrm{Max}(Y_m)$ oznaczamy zbiór m maksymalnych elementów Y_m:

$$\mathrm{Max}(Y_m) = \{x_1^{(m)}, x_1^{(m-1)}, \ldots, x_1^{(1)}\}.$$

Przez $S(X_i)$ oznaczamy zbiór permutacji elementów zbioru $X_i, i = 1, 2, \ldots m$, odpowiednio. Natomiast Ω_m oznacza zbiór takich permutacji

$$\pi = (\pi_l)_{1 \leq l \leq \sum_{i=1}^m n_i},$$

elementów zbioru Y_m, dla których

$$\langle \pi_{1+\sum_{k=0}^{i-1} n_{m-k}}, \pi_{2+\sum_{k=0}^{i-1} n_{m-k}}, \ldots, \pi_{\sum_{k=0}^{i} n_{m-k}} \rangle \in S(X_{m-i}),$$

$i = 0, \ldots, m-1$.

Niech t będzie liczbą naturalną taką, że $1 \leq t \leq \sum_{i=1}^{m} n_i$. W czasie t wybierający widzi porządek indukowany przez $\pi_1, \ldots, \pi_t$. Oznacza to, że jeśli

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} n_{m-i} + j,$$

gdzie $1 \leq j \leq n_{m-k}$, $0 \leq k \leq m-1$, to wybierający widzi k łańcuchów $X_m, \ldots, X_{m-k+1}$ oraz j liniowo uporządkowanych elementów ze bioru X_{m-k}, ale nie zna ich absolutnych pozycji w X_{m-k}. Poszukiwany jest taki czas zatrzymania τ, dla którego prawdopodobieństwo $\mathbf{P}[\pi_\tau \in \mathrm{Max}(Y_m)]$ jest możliwie maksymalne, a więc dający wybierającemu maksymalną szansę wygranej (zauważmy, że $\pi_\tau \in \mathrm{Max}(Y_m)$ dla $\tau = \sum_{i=0}^{k-1} n_{m-i} + j$, $1 \leq j \leq n_{m-k}$, $0 \leq k \leq m-1$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi_\tau = x_1^{(m-k)}$).

2.2.1 Optymalny czas zatrzymania

Niech $p_0 = 0$. Dla $i \geq 1$,

$$p_i = \frac{1}{n_i} + \frac{t_i^* - 1}{n_i} \left(\frac{1}{t_i^*} + \frac{1}{t_i^* + 1} + \ldots + \frac{1}{n_i - 1} \right) + \frac{t_i^* - 1}{n_i} \cdot p_{i-1}, \tag{2.1}$$

gdzie t_i^* jest najmniejszym t spełniającym następującą nierówność

$$1 - p_{i-1} \geq \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \ldots + \frac{1}{n_i - 1} \tag{2.2}$$

lub $t_i^* = n_i$, jeśli $1 - p_{i-1} < \frac{1}{n_i - 1}$, ($t_i^*$ nazywamy progiem w $i-$tym etapie).
Zdefiniujemy teraz następujący ciąg czasów zatrzymania $\tau^{(m)}(\pi)$ dla Y_m, gdzie $m \geq 1$. Dla $m = 1$ i $\pi \in \Omega_1$, niech

$$\tau^{(1)}(\pi) = \min \{t : \pi_t = \max\{\pi_1, \ldots \pi_t\},\ \ t \geq t_1^*\}$$

oraz dla $m > 1$ i $\pi \in \Omega_m$, niech

$$\tau^{(m)}(\pi) = \begin{cases} \min\{t \geq t_m^* : \pi_t = \max\{\pi_1, \ldots \pi_t\}, t \leq n_m\}, & \text{jeśli zbiór pod znakiem minimum jest niepusty,} \\ n_m + \tau^{(m-1)}\left(\langle \pi_{n_m+1}, \ldots, \pi_{\sum_{i=1}^{m} n_i} \rangle\right) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W pierwszym przypadku zatrzymujemy się w pierwszym obserwowanym łańcuchu, tzn. w X_m, w drugim przypadku zatrzymujemy się w którymś z pozostałych $m-1$

łańcuchów $X_{m-1}, \ldots, X_1$.

Głównym rezulatem tej pracy jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([H1], Theorem 2.1). *Czas zatrzymania $\tau^{(m)}$ jest optymalny dla Y_m. Używając czasu zatrzymania $\tau^{(m)}$, prawdopodobieństwo sukcesu jest równe p_m, gdzie p_m jest zdefiniowane warunkiem (2.1).*

Naszkicujemy poniżej dowód tego twierdzenia.

Dowód polega na rekursji. Jeśli mamy do czynienia z jednym tylko łańcuchem, $m = 1$, to teza twierdzenia jest prawdziwa, bo odpowiada klasycznemu problemowi sekretarki [3].

Niech $m \geq 2$. Jeśli sprawdzamy kandydatów z pierwszego łańcucha, to jedyne czasy, w których mamy niezerową szansę sukcesu, to czasy relatywnych rekordów, tzn. czasy w których aktualnie badany element jest najlepszy z dotychczasowych. Numerujemy te czasy jako ρ_i, zaczynając od $\rho_1 = 1$. Gdy opuścimy łańcuch pierwszy, tzn. nie zatrzymaliśmy się na tym łańcuchu, znajdujemy się w sytuacji gry na $m-1$ łańcuchach i zakładamy (rekursyjnie), że znamy już optymalny czas zatrzymania $\tau^{(m-1)}$ dla $m-1$ łańcuchów. Ten czas zatrzymania oznaczamy jako kolejny z czasów ρ_i.

Przeskalowujemy teraz naturalną filtrację $(\mathcal{F}_i)_i$ ($\mathcal{F}_i$ składa się z tych zdarzeń, które opisują każdy możliwy rozwój sytuacji do czasu i), rozważając dalej algebry zdarzeń $(\mathcal{F}_{\rho_i})_i$ odpowiadające powyżej zdefiniowanym czasom zatrzymania ρ_i.

Wprowadzamy proces W_i:

$$W_i = \begin{cases} 1, & gdy \quad \pi_{\rho_i} \in \mathrm{Max}(Y_m), \\ 0, & gdy \quad \pi_{\rho_i} \notin \mathrm{Max}(Y_m) \end{cases}$$

o tej własności, że $EW_i = \mathbf{P}[\text{sukces w czasie } \rho_i]$.

Proces ten nie jest zgodny z filtracją $(\mathcal{F}_{\rho_i})_i$, więc modyfikujemy go jeszcze wprowadzając proces Z_i:

$$Z_i = E(W_i|\mathcal{F}_{\rho_i}).$$

W pracy pokazane jest, że proces ten spełnia założenia tzw. twierdzenia o przypadku monotonicznym ([4]), tzn. zachodzi dla tego procesu implikacja

$$Z_i \geq E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{\rho_i}) \Rightarrow Z_{i+1} \geq E(Z_{i+2}|\mathcal{F}_{\rho_{i+1}}).$$

Zatem, z twierdzenia o przypadku monotonicznym, optymalnym czasem zatrzymania jest pierwszy czas i, dla którego zachodzi poprzednik implikacji. Dla $t = \rho_i$, korzystając z założenia indukcyjnego o p_{m-1} (optymalne prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku Y_{m-1}), obliczamy Z_i i $E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{\rho_i})$ w jawnej postaci:

$$Z_i(\omega) = \frac{t}{n_m}$$

oraz

$$E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{\rho_i})(\omega) = \frac{t}{n_m}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{n_m - 1} + p_{m-1}\right).$$

Korzystając z tych wzorów, nietrudno sprawdzić, że czas t_m^* (próg), od którego już akceptujemy maksymalnego kandydata w pierwszym z m łańcuchów, jest najmniejszym czasem t spełniającym nierówność (2.2), a prawdopodobieństwo sukcesu przedstawia się wzorem (2.1).

2.2.2 Asymptotyka

Zdefiniujemy teraz rekurencyjnie następujący ciąg:

$$a_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad a_i = e^{-1+a_{i-1}} \quad \text{dla} \quad i \geq 1. \tag{2.3}$$

(Ciąg $(a_i)_i$ jest malejący oraz $\lim_{i\to\infty} a_i = 1$. Pierwszych pięć elementów tego ciągu wygląda następująco: $a_1 = 1/e, a_2 = e^{-1+1/e} \approx 0,53, a_3 \approx 0,62, a_4 \approx 0,68, a_5 \approx 0,72$.)

Następne twierdzenie opisuje asymptotyczne zachowanie się progu t_m^* oraz graniczną wartość prawdopodobieństwa sukcesu p_m, gdy $\min\{n_1, \ldots, n_m\} \to \infty$.

Twierdzenie 2 ([H1], Theorem 3.1). *Niech $(a_i)_i$ będzie ciągiem zdefiniowanym w (2.3). Wówczas dla progów t_m^* i optymalnych prawdopodobieństw sukcesu p_m mamy asymptotycznie:*

$$\frac{t_m^*}{n_m} \to a_m \quad \text{oraz} \quad p_m \to a_m,$$

gdy $\min\{n_1, \ldots, n_m\} \to \infty$.

2.3 Praca [H2]

W artykule [H2] rozważany jest model, który jest modyfikacją klasycznego problemu najlepszego wyboru w przypadku pełnej informacji (*full information*). Mianowicie, analogicznie jak w pracy [H1] (przypadek *no information*), rozważamy m następujących jedna po drugiej serii, gdzie każda z serii odpowiada pojedynczemu przypadkowi wyboru najlepszego elementu przy pełnej informacji. Problem najlepszego wyboru przy pełnej informacji polega na wybieraniu *on-line* spośród losowanych w każdym kolejnym czasie elementów z odcinka $[0, 1]$ elementu największego, gdzie każde losowanie odbywa się z rozkładem jednostajnym.

Naszym zadaniem jest wybór jednego z najlepszych elementów z którejś serii przy założeniu, że mamy tylko jeden wybór. Tak jak w [H1] szukamy strategii (czyli czasu zatrzymania), która maksymalizuje prawdopodobieństwo wylosowania elementu maksymalnego w tej serii, w której zdecydujemy się na (nasz jedyny) wybór.

Przedstawimy teraz formalny opis rozważanego procesu.

Niech $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ oraz $\left(X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots, X^{(1)}\right)$ będzie ciągiem m następujących po sobie skończonych ciągów zmiennych losowych:

$$X^{(m)} = (X_1, \ldots, X_{n_m}),$$
$$X^{(m-1)} = \left(X_{n_m+1}, \ldots, X_{n_m+n_{m-1}}\right),$$
$$\ldots,$$
$$X^{(m-i)} = \left(X_{1+\sum_{k=0}^{i-1} n_{m-k}}, X_{2+\sum_{k=0}^{i-1} n_{m-k}} \ldots, X_{\sum_{k=0}^{i} n_{m-k}}\right),$$
$$\ldots,$$
$$X^{(1)} = (X_{n_m+\ldots+n_2+1}, \ldots, X_{n_m+\ldots+n_2+n_1}),$$

gdzie $X_{1+\sum_{k=0}^{i-1} n_{m-k}}, X_{2+\sum_{k=0}^{i-1} n_{m-k}} \ldots, X_{\sum_{k=0}^{i} n_{m-k}}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach z odcinka $[0, 1]$ o rozkładzie jednostajnym. Stosujemy numerację odwrotną, tzn. najpierw obserwujemy ciąg $X^{(m)}$, następnie $X^{(m-1)}$ itd.

Dla $1 \leq i \leq m$ niech $Y^{(i)}$ oznacza sekwencję i ostatnich ciągów, tzn.

$$Y^{(i)} \equiv \left(X^{(i)}, X^{(i-1)}, \ldots, X^{(1)}\right)$$

oraz

$$\mathrm{Max}(Y^{(i)}) = \left\{\max(X^{(i)}), \ldots, \max(X^{(1)})\right\},$$

gdzie $\max(X^{(i)})$ jest największym elementem ciągu $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$.

Niech t będzie liczbą naturalną taką, że $1 \leq t \leq \sum_{i=1}^{m} n_i$. W czasie $t = \sum_{k=0}^{i-1} n_{m-k} + j$, gdzie $0 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq n_{m-i}$, wybierający poznał już wszystkie elementy z i pierwszych ciągów $X^{(m)}, X^{(m-1)}, \ldots, X^{(m-i+1)}$ oraz j elementów ciągu $X^{(m-i)}$. Jego zadaniem jest zatrzymać proces w takim czasie t, w którym prawdopodobieństwo wybrania elementu $X_t \in \mathrm{Max}(Y^{(m)})$ jest maksymalne.

Dla $t \geq 1$, niech $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \ldots, X_t)$, czyli niech $\mathcal{F}_t$ oznacza σ-algebrę generowaną przez $X_1, \ldots, X_t$. Naszym celem jest znalezienie takiego czasu zatrzymania τ_m względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$, dla którego prawdopodobieństwo

$$\mathbf{P}\left[X_{\tau_m} \in \operatorname{Max}(Y^{(m)})\right]$$

jest maksymalne wśród $\mathbf{P}\left[X_\tau \in \operatorname{Max}(Y^{(m)})\right]$, gdzie τ przebiega wszystkie czasy zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$.

2.3.1 Optymalny czas zatrzymania

Dla $m = 1$ liczba oglądanych obiektów wynosi $n_1 = n$ (indeks $_1$ tutaj pomijamy). Wówczas mamy do czynienia z klasycznym problem najlepszego wyboru przy pełnej informacji, gdzie celem jest znalezienie czasu zatrzymania τ, dla którego prawdopodobieństwo, że wzięta w czasie τ wartość X_τ jest największa spośród całego ciągu $(X_i)_{i \leq n}$, jest maksymalne. Oczywiście jedynymi sensownymi czasami wyboru są tzw. relatywne rekordy, czyli czasy, gdy aktualny element jest największy spośród wszystkich dotychczasowych. Intuicyjnie, w przypadku pełnej informacji, tzn. gdy znamy wartości X_i nasza decyzja zależy od wartości X_i. Nawet na samym początku przeglądania elementów, powiedzmy dla $t = 1$, jeśli wartość X_1 jest bardzo duża, czyli bliska 1, możemy ten element już wybrać, bo prawdopodobieństwo, że większy element jeszcze się pojawi, jest małe. Intuicje te oddają formalnie tzw. *liczby decyzyjne* d_k. Liczby te dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ definiowane są od końca, tzn. liczba d_k decyduje o ewentualnym wyborze w czasie $n - k$.

Niech $d_0 = 0$ oraz niech dla $k = 1, 2 \ldots,$

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (d_k^{-1} - 1)^j j^{-1} = 1$$

lub, równoważnie,

$$\sum_{j=1}^{k} (d_k^{-j} - 1) j^{-1} = 1.$$

Ciąg $(d_k)_k$ jest rosnący ze względu na k, $\lim\limits_{k \to \infty} d_k = 1$ oraz $\lim\limits_{k \to \infty} k(1 - d_k) = c$, gdzie $c = 0.804352\ldots$ jest rozwiązaniem następującego równania

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^j}{j!j} = 1$$

lub, równoważnie,

$$\int_0^c x^{-1}(e^x - 1)dx = 1.$$

Optymalny czas zatrzymania τ_n^* wyznaczony jest następująco:

$$\tau_n^* = \min\{t : X_t = \max\{X_1, \ldots, X_t\}, 1 \le t \le n \quad \text{oraz} \quad X_t \ge d_{n-t}\},$$

jeśli zbiór pod znakiem minimum jest niepusty, w przeciwnym przypadku $\tau_n^* = n$.

Prawdopodobieństwo sukcesu (dla optymalnego czasu zatrzymania)

$$v_n = \mathbf{P}\left[X_{\tau_n^*} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}\right]$$

jest funkcją malejącą ze względu na n oraz

$$v_\infty := \lim_{n\to\infty} v_n = e^{-c} + (e^c - c - 1)\int_1^\infty x^{-1}e^{-cx}dx$$

($v_\infty = 0.580164\ldots$) (patrz [23]).

Rozwiązanie zadania wyboru w jednej tylko serii, $m = 1$, dla pełnej informacji oparte jest na zastosowaniu twierdzenia o przypadku monotonicznym ([4]).

Także w przypadku dowolnego m rozważany proces spełnia założenia twierdzenia o przypadku monotonicznym. Ogólne twierdzenie o iterowanych procesach spełniających założenia twierdzenia o przypadku monotonicznym udowodnione jest w omówionej dalej pracy [H3], a rozważany tu wieloetapowy proces dla przypadku pełnej informacji (jak i analogiczny proces dla przypadku klasycznego ([H1])) są szczególnymi przypadkami procesów spełniajacych założenia tego twierdzenia. Zatem optymalny czas zatrzymania ma charakter progowy, a progiem jest pierwszy czas t dla którego spełniona jest nierówność $Z_t \ge E(Z_{t+1}|\mathcal{F}_t)$, jeśli założymy, że w czasie t mamy do czynienia z relatywnym rekordem dla odpowiednio zdefiniowanego procesu Z_t. Faktycznie, posługujac się rekursją i zakładając, że znamy optymalny czas zatrzymania dla ostatnich $m-1$ serii, rozstrzygamy jedynie, kiedy zatrzymać się w pierwszej serii. Jeśli tego nie uczynimy, to jedyny i ostatni czas, w którym możemy się zatrzymać, jest optymalnym czasem dla pozostałych $m-1$ serii.

Przedstawimy teraz szczegółowo wyniki uzyskane w pracy [H2].

Niech γ_{m-1} będzie prawdopodobieństwem sukcesu dla optymalnego czasu zatrzymania dla $Y^{(m-1)}$.

Dla $0 \le k \le n_m$ definiujemy ciąg liczb decyzyjnych $(\hat{d}_k)_{k=0}^{n_m}$ w przypadku wielokrotnego konkursu (z tylko jednym wyborem) w następujący sposób:

$$\hat{d}_0 = 0$$

oraz dla $1 \le k \le n_m - 1$,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\left(\hat{d}_k^{-j} - 1\right) = 1 - \gamma_{m-1} \tag{2.4}$$

lub, równoważnie,

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \frac{1}{j} \left(\hat{d}_k^{-1} - 1 \right)^j = 1 - \gamma_{m-1}.$$

Zauważmy, że $\hat{d}_k$ są używane tylko przy ciągu $X^{(m)}$ i, tak jak poprzednio, liczba $\hat{d}_k$ decyduje o ewentualnym wyborze w czasie $n_m - k$. (Dla $m = 1$, $\hat{d}_k = d_k$.)

Zdefiniujemy teraz następujący ciąg czasów zatrzymania τ_m dla $Y^{(m)}$.
Dla $m = 1$:

$$\tau_1 = \min \left\{ t : X_t = \max \left\{ X_1, \ldots, X_t \right\}, 1 \le t \le n_1 \quad \text{oraz} \quad X_t \ge \hat{d}_{n_1 - t} \right\}$$

oraz dla $m > 1$:

$$\tau_m = \begin{cases} \min\{t : X_t = \max\{X_1, \ldots X_t\}, 1 \le t \le n_m, X_t \ge \hat{d}_{n_m - t}\}, & \text{jeśli zbiór} \\ & \text{pod minimum jest niepusty,} \\ n_m + \tau_{m-1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W pierwszym przypadku powyższej definicji dla $m > 1$ zatrzymujemy się w pierwszym obserwowanym ciągu $X^{(m)} = (X_1, \ldots, X_{n_m})$. W drugim przypadku zatrzymujemy się w którymś z pozostałych $m - 1$ ciągów: $Y^{(m-1)}$.

Głównym rezulatem tej pracy jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([H2], Theorem 2.2). *Czas zatrzymania τ_m jest optymalny dla $Y^{(m)}$. Dla czasu zatrzymania τ_m prawdopodobieństwo sukcesu jest równe*

$$\gamma_m = \frac{1}{n_m} \left(1 - (\hat{d}_{n_m - 1})^{n_m} \right)$$
$$+ \sum_{t=1}^{n_m - 1} \left(\frac{1}{n_m - t} \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{(\hat{d}_{n_m - i})^t}{t} - \frac{(\hat{d}_{n_m - i})^{n_m}}{n_m} \right) - \frac{(\hat{d}_{n_m - t - 1})^{n_m}}{n_m} \right)$$
$$+ \frac{1}{n_m} \sum_{t=1}^{n_m - 1} (\hat{d}_t)^{n_m} \cdot \gamma_{m-1}, \tag{2.5}$$

gdzie przyjmujemy $\gamma_0 = 0$.

Poniżej naszkicujemy dowód tego twierdzenia.

Dowód polega na rekursji ze względu na m. Jeśli $m = 1$, to teza twierdzenia jest prawdziwa i odpowiada klasycznemu problemowi wyboru w przypadku pełnej informacji. Niech $m \ge 2$. Jeśli τ_{m-1} jest optymalnym czasem zatrzymania dla $Y^{(m-1)}$, wtedy jedyne czasy, w których mamy niezerową szansę sukcesu, to czasy relatywnych rekordów, tzn. czasy w których aktualnie badany element jest najlepszy z dotychczasowych dla $X^{(m)}$ oraz optymalny czas zatrzymania τ_{m-1} dla pozostałych $m-1$ ciągów $Y^{(m-1)}$.

Mianowicie, niech $\rho_1 = 1$ oraz dla $2 \leq i \leq \sum_{j=1}^{m} n_j$, jeśli $\rho_{i-1} \leq n_m$, wtedy

$$\rho_i = \begin{cases} \min\{j > \rho_{i-1} : X_j = \max\{X_1, \ldots X_j\}, j \leq n_m\}, & \text{jeśli zbiór} \\ & \text{pod minimum jest niepusty,} \\ n_m + \tau_{m-1} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy, że jeśli $\rho_i \leq n_m$, wtedy ρ_i jest czasem i-tego relatywnego rekordu. Jeśli $\rho_{i-1} > n_m$, wtedy $\rho_i = \rho_{i-1}$.

Wprowadzamy proces W_i:

$$W_i = \begin{cases} 1, & gdy \quad X_{\rho_i} \in \mathrm{Max}(Y^{(m)}), \\ 0, & gdy \quad X_{\rho_i} \notin \mathrm{Max}(Y^{(m)}), \end{cases}$$

o tej własności, że $EW_i = \mathbf{P}[\text{sukces w czasie } \rho_i]$.

Proces ten nie jest zgodny z filtracją $(\mathcal{F}_{\rho_i})_i$, więc modyfikujemy go, wprowadzając proces Z_i:

$$Z_i = E(W_i | \mathcal{F}_{\rho_i}).$$

Stąd prawdopodobieństwo zatrzymania się na elemencie maksymalnym jest równe

$$\mathbf{P}[X_{\rho_i} \in \mathrm{Max}(Y^{(m)})] = \mathbf{P}[W_i = 1] = E(Z_i).$$

Zatem naszym zadaniem jest maksymalizacja wartości oczekiwanej $E(Z_\tau)$ po wszystkich czasach zatrzymania τ generowanych przez $\left(\mathcal{F}_{\rho_i}\right)_i$.

W pracy pokazane jest, że rozważany proces spełnia założenia twierdzenia o przypadku monotonicznym. Zatem optymalnym czasem zatrzymania jest pierwszy czas i, dla którego zachodzi nierówność

$$Z_i \geq E(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{\rho_i}).$$

Wyznaczamy Z_i i $E(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{\rho_i})$ w jawnej postaci w następujący sposób.

Zakładamy, że dla pierwszego badanego ciągu $X^{(m)}$ w czasie t obserwowany element jest relatywnym rekordem i ma wartość x. Zatem $t = \rho_j$ dla pewnego j. Do wylosowania zostało jeszcze $n_m - t$ elementów ciągu $X^{(m)}$. Prawdopodobieństwo, że żaden z pozostałych $n_m - t$ elementów nie jest większy od x, jest równe $x^{n_m - t}$. Stąd, jeśli zatrzymamy się w tym momencie, prawdopodobieństwo sukcesu, jest równe $x^{n_m - t}$. Natomiast jeśli się nie zatrzymamy, to prawdopodobieństwo sukcesu, gdy zatrzymujemy się w ciągu $X^{(m)}$ na następnym relatywnym rekordzie, jest równe

$$\sum_{i=1}^{n_m - t} \binom{n_m - t}{i} \frac{1}{i} x^{n_m - t - i} (1-x)^i,$$

gdzie i-ty składnik powyższej sumy jest równy prawdopodobieństwu zdarzenia, że dokładnie i elementów z pozostałych $n_m - t$ elementów jest większych od x oraz maksymalny z tych i elementów pojawił się jako pierwszy. Mamy zatem czynnik $\binom{n_m-t}{i}$ (wybór dokładnie i elementów z pozostałych $n_m - t$ elementów). Prawdopodobieństwo, że tylko te elementy są większe od x, jest równe $x^{n_m-t-i}(1-x)^i$, a prawdopodobieństwo, że największy z tych i elementów pojawi się jako pierwszy, jest równe $\frac{1}{i}$.

Jeśli jednak po czasie t do czasu n_m (czyli do końca pierwszego badanego ciągu $X^{(m)}$), nie pojawi się element większy od x, to przechodzimy do badania pozostałych $m-1$ ciągów: $X^{(m-1)}, \ldots, X^{(1)}$ i wówczas stosujemy optymalny czas zatrzymania dla $Y^{(m-1)}$. Prawdopodobieństwo sukcesu w tym przypadku jest równe $x^{n_m-t}\gamma_{m-1}$, gdzie x^{n_m-t} oznacza prawdopodobieństwo, że żaden z pozostałych $n_m - t$ elementów nie jest większy od x.

Mamy zatem

$$Z_j = x^{n_m-t}$$

oraz

$$E(Z_{j+1}|\mathcal{F}_{\rho_j}) = \sum_{i=1}^{n_m-t} \binom{n_m-t}{i} \frac{1}{i} x^{n_m-t-i}(1-x)^i + x^{n_m-t}\gamma_{m-1}.$$

Stosując twierdzenie o przypadku monotonicznym, zatrzymujemy się na pierwszym relatywnym rekordzie w czasie t, dla którego zachodzi nierówność

$$x^{n_m-t} \geq \sum_{i=1}^{n_m-t} \binom{n_m-t}{i} \frac{1}{i} x^{n_m-t-i}(1-x)^i + x^{n_m-t}\gamma_{m-1}. \tag{2.6}$$

Ponieważ

$$\sum_{i=1}^{n_m-t} \binom{n_m-t}{i} \frac{1}{i} \left(1-x^{-1}\right)^i = \sum_{i=1}^{n_m-t} \frac{1}{i} \left(x^{-i}-1\right),$$

nierówność (2.6) jest równoważna postaci

$$1-\gamma_{m-1} \geq \sum_{i=1}^{n_m-t} \frac{1}{i} \left(x^{-i}-1\right). \tag{2.7}$$

Funkcja $f(x) = \sum_{i=1}^{n_m-t} \frac{1}{i}\left(x^{-i}-1\right)$ jest malejąca ze względu na x, gdzie $0 < x < 1$ i $1 \leq t \leq n_m - 1$. Stąd wynika, że najmniejsze x spełniające nierówność (2.7) jest równe rozwiązaniu równania

$$1-\gamma_{m-1} = \sum_{i=1}^{n_m-t} \frac{1}{i} \left(x^{-i}-1\right).$$

Zatem, wobec (2.4), τ_m jest optymalnym czasem zatrzymania.

Prawdopodobieństwo, że zatrzymamy się na elemencie z ciągu $X^{(m)}$ i osiągniemy sukces, jest równe

$$\mathbf{P}[X_{\tau_m} = \max(X^{(m)})] = \sum_{t=1}^{n_m} p_t, \tag{2.8}$$

gdzie p_t jest równe prawdopodobieństwu, że zatrzymamy się w czasie t i wygramy, czyli $X_t = \max\{X_1, \dots, X_{n_m}\}$.

Łatwo zauważyć, że

$$p_1 = \int_{\hat{d}_{n_m-1}}^{1} x^{n_m-1} dx = \frac{1}{n_m}\left(1 - (\hat{d}_{n_m-1})^{n_m}\right). \tag{2.9}$$

Można wykazać, że dla $1 \leq t \leq n_m - 1$

$$p_{t+1} = \frac{1}{n_m - t} \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{(\hat{d}_{n_m-i})^t}{t} - \frac{(\hat{d}_{n_m-i})^{n_m}}{n_m} \right) - \frac{(\hat{d}_{n_m-t-1})^{n_m}}{n_m}. \tag{2.10}$$

Nie zatrzymamy się w pierwszym badanym ciągu $X^{(m)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $1 \leq t \leq n_m - 1$, $X_t < \hat{d}_{n_m-t}$, ilekroć $X_t = \max\{X_1, \dots X_t\}$. Stąd prawdopodobieństwo, że nie zatrzymamy się na ciągu $X^{(m)}$, czyli $\tau_m > n_m$, jest równe

$$P[\tau_m > n_m] = \sum_{t=1}^{n_m-1} \int_0^{\hat{d}_{n_m-t}} x^{n_m-1} dx = \sum_{t=1}^{n_m-1} \frac{(\hat{d}_t)^{n_m}}{n_m}.$$

Z powyższej równości, (2.9), (2.10) oraz (2.8) wynika teza Twierdzenia 1 (2.5).

2.3.2 Asymptotyka

Przedstawimy teraz wyniki dotyczące asymptotycznego zachowania się prawdopodobieństw sukcesu γ_m oraz liczb decyzyjnych $\hat{d}_k$ gdy $n_i \longrightarrow \infty$ dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$.

Zdefiniujemy rekurencyjnie następujący ciąg: $r_0 = 0$ oraz dla $i \geq 1$:

$$r_i = e^{-c_i} + (e^{c_i} - c_i - 1) \int_1^{\infty} x^{-1} e^{-c_i x} dx,$$

gdzie c_i spełnia następujące równanie ($i \geq 1$)

$$\int_0^{c_i} x^{-1}(e^x - 1)\, dx = 1 - r_{i-1}$$

lub, równoważnie,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_i^j}{j!j} = 1 - r_{i-1}.$$

W pracy pokazane jest, że ciąg $(c_m)_m$ jest malejący i $\lim_{m\to\infty} c_m = 0$. (Pierwszych pięć elementów tego ciągu: $c_1 \approx 0.8043, c_2 \approx 0.3803, c_3 \approx 0.2404, c_4 \approx 0.1722, c_5 \approx 0.1325$.)

Natomiast $(r_m)_m$ jest rosnący i $\lim_{m\to\infty} r_m = 1$. (Pierwszych pięć elementów tego ciągu: $r_1 \approx 0.5801, r_2 \approx 0.7443, r_3 \approx 0.8200, r_4 \approx 0.8629, r_5 \approx 0.8903$.)

Niech $n_i^* = \min\{n_1, \ldots, n_i\}$ dla $i = 1, \ldots m$. Następne twierdzenie opisuje graniczną wartość prawdopodobieństwa sukcesu γ_m.

Twierdzenie 2 ([H2], Theorem 3.1). *$\gamma_m \to r_m$, gdy $n_m^* \to \infty$.*

Dowód tego twierdzenia przeprowadzamy indukcyjnie ze względu na m.

Dla $m = 1$ mamy

$$\lim_{n_1^*\to\infty} \gamma_1 = v_\infty = r_1.$$

Jest to znane asymptotyczne prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku wyboru najlepszego elementu w problemie sekretarki z pełną informacją (pojedynczy konkurs).

Gdy $m \geq 2$ zakładamy, że $\lim_{n_{m-1}^*\to\infty} \gamma_{m-1} = r_{m-1}$.

Następnie stosujemy metodę użytą przez S.M. Samuelsa w pracy [22]. Dla pierwszego rozważanego ciągu $X^{(m)}$ wprowadzamy następujące oznaczenia. Niech

$$M_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad M_t = \max\{X_1, \ldots, X_t\} \quad \text{dla} \quad 1 \leq t \leq n_m.$$

Niech σ_{n_m} oznacza czas pojawienia się największego elementu ciągu $X^{(m)}$ oraz $\hat{\sigma}_{n_m}$ - czas pojawienia się największego elementu ciągu $X^{(m)}$, który pojawił się przed czasem σ_{n_m}, tzn.

$$X_{\sigma_{n_m}} = M_{n_m} \qquad \text{oraz} \qquad X_{\hat{\sigma}_{n_m}} = M_{\sigma_{n_m}-1}.$$

Ponieważ ciąg $(\hat{d}_{n_m-t})_{n_m-t}$ jest malejący, a ciąg $(M_t)_t$ jest rosnący względem t dla $1 \leq t \leq n_m$, to prawdopodobieństwo sukcesu, gdy zatrzymamy się na elemencie ciągu $X^{(m)}$, jest równe

$$\mathbf{P}\left[X_{\tau_m} = M_{n_m}\right] = \mathbf{P}\left[M_{n_m} \geq \hat{d}_{n_m-\sigma_{n_m}} \ \ \& \ \ M_{\sigma_{n_m}-1} < \hat{d}_{n_m-\hat{\sigma}_{n_m}}\right].$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że nie zatrzymamy się na tym ciągu, czyli przejdziemy dalej (do $Y^{(m-1)}$), jest równe

$$\mathbf{P}\left[\tau_m > n_m\right] = \mathbf{P}\left[M_{n_m} < \hat{d}_{n_m-\sigma_{n_m}}\right].$$

Zatem

$$\lim_{n_m^* \to \infty} \gamma_m = \lim_{n_m^* \to \infty} \mathbf{P}\left[X_{\tau_m} = M_{n_m}\right] + \lim_{n_m^* \to \infty} \mathbf{P}\left[M_{n_m} < \hat{d}_{n_m - \sigma_{n_m}}\right] \cdot \lim_{n_{m-1}^* \to \infty} \gamma_{m-1}. \quad (2.11)$$

W pracy udowodnione są następujące dwie równości:

$$\lim_{n_m^* \to \infty} \mathbf{P}\left[X_{\tau_m} = M_{n_m}\right] = e^{-c_m} + (e^{c_m} - c_m - 1) \int_1^\infty x^{-1} e^{-c_m x} dx$$
$$-r_{m-1}\left(e^{-c_m} - c_m \int_1^\infty x^{-1} e^{-c_m x} dx\right) \quad (2.12)$$

oraz

$$\lim_{n_m^* \to \infty} \mathbf{P}\left[M_{n_m} < \hat{d}_{n_m - \sigma_{n_m}}\right] = e^{-c_m} - c_m \int_1^\infty x^{-1} e^{-c_m x} dx. \quad (2.13)$$

Wówczas z (2.11), (2.12) oraz (2.13) i z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$r_m = e^{-c_m} + (e^{c_m} - c_m - 1) \int_1^\infty x^{-1} e^{-c_m x} dx,$$

co kończy dowód twierdzenia 2.

W pracy badamy asymptotyczne zachowanie się ciągu liczb decyzyjnych $(\hat{d}_k)_k$. Pokazujemy, że $\hat{d}_k \longrightarrow 1$, gdy $k \longrightarrow \infty$ oraz $n_m^* \longrightarrow \infty$. Najpierw dowodzimy, że

$$\alpha_k \longrightarrow c_m \quad \text{gdy} \quad (k, n_m^*) \longrightarrow (\infty, \infty) \quad \text{i} \quad k \leq n_m - 1, \quad (2.14)$$

gdzie

$$\alpha_k = k\left(\hat{d}_k^{-1} - 1\right) \quad (2.15)$$

dla $1 \leq k \leq n_m - 1$. Zauważmy, że α_k jest funkcją m zmiennych: $k, n_{m-1}, \ldots, n_1$, czyli $\alpha_k = \alpha_k(n_{m-1}, \ldots, n_1)$.

Zatem $\hat{d}_k = \left(\frac{\alpha_k}{k} + 1\right)^{-1}$. Korzystając z (2.14) oraz faktu, że $0 < c_m < 1$, otrzymujemy $\hat{d}_k \longrightarrow 1$, gdy $(k, n_m^*) \longrightarrow (\infty, \infty)$ i $k \leq n_m - 1$.

W pracy podane są również przybliżone wartości prawdopodobieństw sukcesu dla $m = 2$, w przypadku gdy oba ciągi są tej samej długości $n = 2, 3, \ldots, 11, 12$ oraz 20. Stosujemy optymalną strategię, używając (2.15) dla liczb decyzyjnych $\hat{d}_k$. Asymptotycznie: $\gamma_2 \longrightarrow 0.7443...$, gdy $n \longrightarrow \infty$.

2.4 Praca [H3]

Głównym problemem w poprzednio omawianych pracach jest znalezienie optymalnego czasu zatrzymania pewnych konkretnych procesów stochastycznych, tzn. czasu zatrzymania, w którym wartość oczekiwana sukcesu jest maksymalna. Użytecznym narzędziem w tego typu badaniach jest tzw. twierdzenie o przypadku monotonicznym.

Twierdzenie o przypadku monotonicznym brzmi następująco ([4]).

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że $\{(X_i, \mathcal{F}_i) : i \le m\}$ jest procesem stochastycznym takim, że dla prawie każdego ω zachodzi następująca implikacja*

$$X_i(\omega) \ge E(X_{i+1}|\mathcal{F}_i)(\omega) \Rightarrow X_{i+1}(\omega) \ge E(X_{i+2}|\mathcal{F}_{i+1})(\omega)$$

dla każdego $i \le m-2$. Wówczas czas zatrzymania

$$\bar{\tau}(\omega) = \min\{i : X_i(\omega) \ge E(X_{i+1}|\mathcal{F}_i)(\omega)\}$$

(jeśli zbiór pod znakiem minimum jest pusty, wtedy $\bar{\tau} = m$) jest optymalnym czasem zatrzymania maksymalizującym wartość oczekiwaną EX_τ względem wszystkich czasów zatrzymania τ.

W pracy [H3] podajemy wygodne narzędzie umożliwiające sprawdzenie, czy dany proces spełnia założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym, (zamiast sprawdzania powyższej implikacji).

Mianowicie, jeśli nieujemny proces stochastyczny $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i=1}^m$ z czasem dyskretnym, dla którego zero jest stanem absorbujacym, spełnia następującą nierówność typu logarytmicznej wypukłości:

$$X_{t+1}(\omega)E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \ge X_t(\omega)E(X_{t+2}|\mathcal{F}_{t+1})(\omega) \tag{2.16}$$

dla prawie każdego ω, wtedy proces X spełnia warunek przypadku monotonicznego.

Pewna ogólniejsza wersja tego twierdzenia stosuje się także do optymalnego zatrzymywania procesów $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i=1}^m$ przedłużonych o kolejną zmienną losową Q niezależną od procesu $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i=1}^m$. Analogiczna nierówność ma wówczas następującą postać:

$$\begin{aligned} &X_{t+1}(\omega)E\left(X_{t+1}|\mathcal{F}_t\right)(\omega) + X_{t+1}(\omega)E\left(\mathbf{1}_{[X_{t+1}=0]}|\mathcal{F}_t\right)(\omega)EQ \\ &\ge X_t(\omega)E\left(X_{t+2}|\mathcal{F}_{t+1}\right)(\omega) + X_t(\omega)E\left(\mathbf{1}_{[X_{t+2}=0]}|\mathcal{F}_{t+1}\right)(\omega)EQ. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Daje to wygodne narzędzie poszukiwania optymalnego czasu zatrzymania maksymalizującego prawdopodobieństwo sukcesu w przypadku wielokrotnych konkursów na najlepszą sekretarkę z możliwością tylko jednego wyboru, gdzie sukcesem jest wybór najlepszej kandydatki w jej grupie, np. w problemach rozważanych w pracy [H1] i [H2].

Przedstawimy teraz szczegółowo wyniki uzyskane w pracy [H3].

Rozważmy nieujemny dyskretny proces stochastyczny X:

$$X = \{(X_i, \mathcal{F}_i) : i \leq m\}$$

oraz nieujemną zmienną losową Q niezależną od X. Załóżmy również, że

$$X_1(\omega) > 0, X_2(\omega) > 0, X_{k-1}(\omega) > 0 \quad \text{oraz} \quad X_k(\omega) = \ldots = X_m(\omega) = 0 \tag{2.18}$$

dla prawie każdego $\omega \in \Omega$, gdzie k zależy od ω.

Niech

$$Z_i = X_i, i \leq m, \quad \text{oraz} \quad Z_{m+1} = Q.$$

Ponadto, niech

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_i, i \leq m, \quad \text{oraz} \quad \mathcal{E}_{m+1} = \sigma\left(\mathcal{F}_m, \sigma(Q)\right).$$

Przeskalowujemy teraz naturalną filtrację $(\mathcal{F}_i)_i$, która jest σ-algebrą tych wszystkich zdarzeń, które opisują możliwy rozwój sytuacji do czasu i, rozważając jedynie czasy, w których mamy niezerową szansę sukcesu, tzn. czasy, w których aktualnie badany element jest maksymalny spośród zbadanych dotychchczas. Naszym zadaniem jest maksymalizacja EZ_τ dla wszystkich czasów zatrzymania τ generowanych przez filtrację $(\mathcal{E}_j)_{1 \leq j \leq m+1}$. Niech zatem

$$\rho_i(\omega) = \begin{cases} i, & \text{jeśli } X_i(\omega) > 0, \\ m+1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{2.19}$$

W pracy podajemy wystarczajacy warunek na to, aby proces $(Z_{\rho_i}, \mathcal{E}_{\rho_i})_{i \leq m+1}$ spełniał założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym.

Głównym wynikiem tej pracy jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 ([H3], Theorem 2.2). *Jeśli proces $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \leq m}$ spełnia warunek (2.18) oraz dla każdego ω zachodzi (2.17), jeśli tylko $X_{t+1}(\omega) > 0$, wtedy proces $(Z_{\rho_i}, \mathcal{E}_{\rho_i})_{i \leq m+1}$ spełnia założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym.*

(Faktycznie założenie $X_{t+1}(\omega) > 0$ można pominąć, ponieważ w przypadku $X_{t+1}(\omega) = 0$ warunek (2.17) jest spełniony ze względu na to, że zero jest stanem absorbującym.)

Zauważmy, że jeśli założymy, że $Q \equiv 0$ dla procesu Z w twierdzeniu 2, to proces X nie ma przedłużenia i otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3 ([H3], Theorem 2.3). *Jeśli proces $X = (X_i)_{i \leq m}$ spełnia warunek (2.18),* *w szczególności, jeśli X jest ściśle dodatni i dla każdego ω zachodzi nierówność (2.16), wtedy X spełnia założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym.*

Załóżmy, że procesy $X = \{(X_t, \mathcal{K}_t), 1 \leq t \leq m\}$ i $Y = \{(Y_t, \mathcal{L}_t), 1 \leq t \leq n\}$ występują jeden po drugim. Mamy zatem proces $C = \{(C_t, \mathcal{M}_t),\ 1 \leq t \leq m + n\}$ taki, że $C_t = X_t$ dla $t \leq m$ oraz $C_{m+t} = Y_t$ dla $t \leq n$, gdzie $\mathcal{M}_t = \mathcal{K}_t$ dla $t \leq m$ oraz $\mathcal{M}_{m+t} = \sigma(\mathcal{K}_m \cup \mathcal{L}_t)$. O procesach X i Y zakładamy, że ich przestrzenie probabilistyczne są takie same, ale σ-algebry $\mathcal{K}_m$ i $\mathcal{L}_n$ są niezależne. Zatem X i Y są niezależne. Niech $\bar{\tau}$ będzie optymalnym czasem zatrzymania maksymalizującym EY_τ względem wszystkich czasów zatrzymania τ dla filtracji $(\mathcal{L}_t)_t$ oraz niech $Z = \{(Z_t, \mathcal{E}_t),\ 1 \leq t \leq m + 1\}$ będzie przedłużonym procesem X o jednoelementowy proces $(Y_{\bar{\tau}}, \mathcal{L}_{\bar{\tau}})$. Taki proces Z nazywamy *połączeniem* X i Y.

Intuicyjnie, jeśli chcemy zmaksymalizować EC_τ względem wszystkich czasów zatrzymania τ generowanych przez $(\mathcal{M}_t)_{t \leq m+n}$ w przypadku, kiedy nie zatrzymaliśmy się w pierwszej części, tzn. $t \leq m$, w drugiej części powinniśmy grać optymalnie ze wzgledu na optymalny czas zatrzymania dla filtracji $(\mathcal{L}_t)_{t \leq n}$, czyli maksymalizujemy EZ_τ dla wszystkich czasów τ dla filtracji $(\mathcal{E}_t)_{t \leq m+1}$.

Następne twierdzenie mówi, że jeśli połączymy dwa niezależne procesy, to szukając optymalnego czasu zatrzymania maksymalizującego wartość oczekiwaną połączonego procesu, drugi proces możemy zastąpić jedną zmienną losową będącą śladem pozostawionym na nim przez optymalny czas zatrzymania dla drugiego procesu. W szczególności informacje zdobyte podczas pierwszego konkursu nie wpływają na naszą optymalną decyzję podczas zatrzymywania się w drugim konkursie, o ile, grając optymalnie, nie zatrzymamy się w pierwszym konkursie.

Twierdzenie 4 ([H3], Theorem 3.3). *Niech procesy X, Y, C, Z spełniają powyższe założenia. Jeśli $\zeta = \overline{\zeta}$ jest czasem zatrzymania, dla którego EZ_ζ jest maksymalne względem wszystkich czasów zatrzymania ζ dla filtracji $(\mathcal{E}_t)_t$, wtedy czas zatrzymania $\overline{\delta} = \overline{\delta}_{\overline{\zeta},\overline{\tau}}$ zdefiniowany jako $\overline{\delta} = \overline{\zeta}$, jeśli $\overline{\zeta} \leq m$ i $\overline{\delta} = m + \overline{\tau}$, gdy $\overline{\zeta} = m + 1$, maksymalizuje EC_δ względem wszystkich czasów zatrzymania δ dla filtracji $(\mathcal{M}_t)_t$.*

Wynik ten jest później używany do znalezienia optymalnego czasu zatrzymania dla maksymalizacji wartości oczekiwanej procesu C, jeśli proces C jest połączeniem dwóch niezależnych procesów: procesu X, po którym następuje niezależny proces Y.

Wprowadzimy teraz pojęcie *MIA* (z angielskiego "*maximum identification average*") stosowane w pracy.

Niech $V = \{(V_t, \mathcal{H}_t),\ 1 \leq t \leq m\}$ będzie procesem stochastycznym, którego wartości są etykietowanymi podzbiorami częściowo uporządkowanymi rosnącymi wraz z czasem, $V_t(\omega) \subseteq V_{t+1}(\omega)$ oraz $|V_{t+1}(\omega) \setminus V_t(\omega)| = 1$. Element tego podzbioru częściowo uporządkowanego jest etykietowany czasem jego przyjścia. Niech $v_t = v_t(\omega)$ będzie elementem, który pojawia się w czasie t. Zatem etykieta t jest przypisana zarówno elementowi v_t, który pojawia się w czasie t, jak i do zbioru częściowo uporządkowanego V_t składającego się ze wszystkich elementów $v_1, v_2, \ldots, v_t$, które pojawiły się do czasu t . W szczególności $|V_t(\omega)| = t$. Można założyć, że struktura zbioru częściowo uporządkowanego V_t jest to cała informacja, jaką mamy w czasie t, ale możliwe jest również, że V_t jest szczególnym posetem, na przykład V_t jest ciągiem t liczb z przedziału $[0, 1]$ i liczby te są znane w czasie t. Zakładamy również, że dla każdego ω w zbiorze wszystkich elementów $\{v_1(\omega), \ldots, v_m(\omega)\}$, które zbadamy, zawsze istnieje element największy $M(\omega)$. Jeśli V jest ustalonym zbiorem częściowo uporządkowanym, to $M(\omega) = M$ jest największym elementem V, który nie zależy od ω. Tak jest np. w klasycznym przypadku wyboru najlepszej sekretarki. W przypadku wyboru najlepszego elementu przy pełnej informacji, największy element $M(\omega)$ nie jest znany a priori i zależy od ω. Naszym zadaniem jest zatrzymanie się w chwili $\tau(\omega)$ tak, aby

$$\mathbf{P}[\omega_\tau = M]$$

było maksymalne.
Przeskalowujemy czas w następujący sposób:

$$\xi_1(\omega) = 1, \ \xi_{i+1}(\omega) = \min\{j > \xi_i(\omega) : \mathbf{P}[v_j = M] > 0\}, \tag{2.20}$$

przy czym, jeśli pod znakiem min zbiór jest pusty, to przyjmujemy

$$\xi_{i+1}(\omega) = m. \tag{2.21}$$

Mamy wówczas

$$\mathbf{P}[v_{\xi_t} = M] > 0 \ \text{ lub } \ \mathbf{P}[v_{\xi_t} = M] = \ldots = \mathbf{P}[v_{\xi_m} = M] = 0.$$

Niech $(\mathcal{F}_t)_t$ będzie filtracją kanonicznie związaną z ciągiem czasów zatrzymania $(\xi_t)_t$. Niech $W_t = \mathbf{1}_{[v_{\xi_t} = M]}$. Proces W_t nie jest zgodny z filtracją $(\mathcal{F}_t)_t$, więc modyfikujemy go jeszcze wprowadzając proces X_t:

$$X_t = E(W_t|\mathcal{F}_t).$$

Wówczas

$$EX_\tau = \mathbf{P}\left[v_{\xi_\tau} = M\right].$$

Maksymalizacja wartości oczekiwanej EX_τ jest równoważna maksymalizacji wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\left[v_\rho = M\right]$ względem wszystkich czasów zatrzymania ρ odpowiadajacym pierwotnej filtracji. (Mówimy, że proces X jest *MIA* dla rozważanego procesu najlepszego wyboru.)

W pracy zostało udowodnione następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5 ([H3], Theorem 4.1). *Jeśli $X = \{(X_t, \mathcal{F}_t),\ 1 \leq t \leq m\}$ jest typu MIA dla pewnego procesu oraz $X_t(\omega) > 0$, wtedy*

$$E\left(\mathbf{1}_{[X_{t+1}=0]}|\mathcal{F}_t\right)(\omega) = X_t(\omega)$$

dla prawie każdego ω. W szczególności dla MIA warunek (2.17) jest równoważny warunkowi (2.16).

Wynika to stąd, że jeśli $X_t(\omega) > 0$, to

$$E\left(\mathbf{1}_{[X_{t+1}=0]}|\mathcal{F}_t\right)(\omega) = E(\mathbf{1}_{[v_{\xi_t}=M]}|\mathcal{F}_t)(\omega) = E(W_t|\mathcal{F}_t)(\omega) = X_t(\omega).$$

Pokazaliśmy zatem, że jeśli $X = \{(X_i, \mathcal{F}_i),\ 1 \leq i \leq m\}$ jest MIA dla problemu wyboru najlepszej sekretarki na zbiorze częściowo uporządkowanym z jednym elementem maksymalnym oraz Y jest zmienną losową niezależną od X, to przedłużony proces $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y$ spełnia założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym, gdy spełniona jest nierówność (2.16).

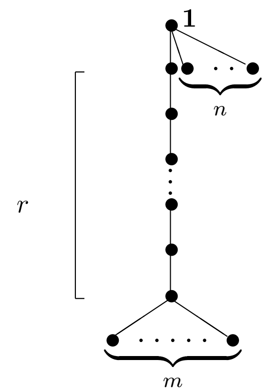
Wynika stąd, że problem najlepszego wyboru dla wielokrotnego konkursu możemy rozwiązać rekursywnie w następujący sposób. Proces $X = (X_i)_{i\leq m}$ jest MIA dla pierwszego obserwowanego zbioru. Przez $Y = (Y_i)_{i\leq k}$ oznaczamy proces opisujący konkurs na pozostałych $n-1$ zbiorach. Zakładamy, że znany jest optymalny czas zatrzymania τ dla Y. Na podstawie twierdzenia 4 wystarczy zatem rozważyć proces X przedłużony o zmienną losową Y_τ (niezależną od X) i, na podstawie powyższego twierdzenia, wystarczy sprawdzić, czy X spełnia nierówność (2.16).

W pracy pokazujemy, że nierówność (2.16) jest spełniona w przypadku procesów MIA dla klasycznego problemu sekretarki (bez informacji) oraz problemu sekretarki przy pełnej informacji.

Jako przykład zastosowania udowodnionych twierdzeń rozpatrujemy procesy opisujące dwa następujące po sobie konkursy. Oba te konkursy mogą być zarówno konkursem na wybór najlepszej sekretarki w przypadku klasycznym (bez informacji) albo w przypadku pełnej informacji; rozpatrujemy wszystkie cztery możliwe konfiguracje. Korzystając z udowonionych w pracy twierdzeń, znajdujemy optymalne czasy zatrzymania.

W pracy przedstawiamy też dwa zastosowania głównych wyników dla procesów, które nie są procesami wyboru najlepszej sekretarki na zbiorze częściowo uporządkowanym z jednym elementem maksymalnym. Pierwszy z nich jest procesem typu MIA, ale wyboru dokonujemy na zbiorze częściowo uporządkowanym z dwoma elementami maksymalnymi. (Proces ten po raz pierwszy był rozpatrywany w pracy [7].) Drugi natomiast dotyczy procesu rozpowszechniania informacji w drodze spaceru losowego. (Proces ten po raz pierwszy był rozpatrywany w pracy [15].)

Pojawiają się naturalne pytania dotyczące związków optymalnego czasu zatrzymania ze spełnianiem przez proces typu MIA lub przez iterację takich procesów założenia twierdzenia o przypadku monotonicznym lub nierówności (2.16). Podajemy przykłady, które dają odpowiedzi na niektóre z nich. Przykłady te są procesami dla zagadnienia najlepszego wyboru, gdzie kandydaci tworzą zbiór częściowo uporządkowany o diagramie Hassego będącym szczególną realizacją drzewa przedstawionego na Rys.1 (przy odpowiednio dobranych parametrach m, n i r) lub iteracją takich procesów.



Rys.1

Podajemy przykłady procesów o następujących własnościach:

1. proces, który spełnia założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym, ale nie spełnia nierówności (2.16);
2. podwójna iteracja procesu spełniającego założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym, lecz nie spełniającego nierówności (2.16), która sama nie spełnia tego założenia. Niemniej jednak optymalny czas zatrzymania wyznaczony jest tak jak w przypadku monotonicznym;
3. pojedynczy proces typu MIA, który nie spełnia założenia o przypadku monotonicznym, ale optymalny czas zatrzymania wyznaczony jest tak jak w przypadku monotonicznym;
4. proces typu MIA, który nie spełnia założenia twierdzenia o przypadku monotonicznym oraz tezy tego twierdzenia;
5. proces składający się z dwóch niezależnych procesów typu MIA, który nie spełnia tezy twierdzenia o przypadku monotonicznym.

2.5 Praca [H4]

W pracy [H4] rozważamy następujący problem najlepszego wyboru dla wielokrotnego konkursu, przy czym decyzja o zatrzymaniu może być podjęta tylko jeden raz.

Niech G_N oznacza grę opartą na spacerze losowym. Gracz kupuje N żetonów za cenę d_N. Każdy żeton zapewnia jedną rundę gry. Po włożeniu żetonu do maszyny automat rozpoczyna symetryczny losowy spacer w dyskretnym przedziale $[-r, r]$, gdzie 0 jest punktem początkowym. W trakcie gry gracz zna liczbę wykonanych dotychczas kroków, ale nie wie, czy w danym kroku spacer przebiega w prawo czy w lewo i w związku z tym nie zna aktualnej pozycji spaceru. Maszyna kończy rundę, gdy spacer osiągnie jeden z punktów końcowych $-r$ lub r bez żadnej wypłaty dla gracza. Licznik jest resetowany do zera, a gracz może użyć nowego żetonu, jeśli jeszcze mu jakiś został, aby rozpocząć następną rundę. W dowolnym momencie gracz może przerwać całą grę, uzyskując wypłatę równą liczbie kroków (widocznych na liczniku) wykonanych w bieżącej rundzie. W pracy określamy optymalną strategię (czyli czas zatrzymania) dla gracza. Jest to strategia typu progowego, a do udowodnienia jej optymalności stosuje się twierdzenie o przypadku monotonicznym.

Przedstawimy teraz szczegółowo wyniki tej pracy.

Niech r będzie nieparzystą liczbą naturalną większą niż 1 (przypadek dla r parzystego jest analogiczny). Zauważmy, że przy takim założeniu spacer losowy może osiągnąć jeden z punktów końcowych w czasie n tylko wtedy, gdy n jest nieparzyste.

Niech S_n oznacza pozycję spaceru w czasie n. Zatem $S_0 = 0$,

$$\mathbf{P}\left(S_{n+1} = S_n + 1\right) = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{P}\left(S_{n+1} = S_n - 1\right) = \frac{1}{2},$$

gdy $S_n \in (-r, r)$.

Niech $T_r = \min\{k : k \geq 1, S_k \in \{-r, r\}\}$. Korzystamy z [26] (str. 243) do wyznaczenia prawdopodobieństwa pozostania w przedziale $[-r+1, r-1]$ po n krokach:

$$\mathbf{P}\left(T_r > n\right) = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \left[\cos \frac{2j+1}{2r}\pi\right]^n (-1)^j \operatorname{ctg} \frac{2j+1}{2r}\frac{\pi}{2} \tag{2.22}$$

oraz prawdopodobieństwa zdarzenia, że pozycja spaceru w czasie n jest równa $-r+1$ lub $r-1$:

$$\mathbf{P}\left(S_n \in \{-r+1, r-1\}\right) = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \left[\cos \frac{2j+1}{2r}\pi\right]^n (-1)^j \sin \frac{2j+1}{2r}\pi.$$

Decyzja gracza o zatrzymaniu się lub kontynuowaniu gry w czasie n zależy od n. Zauważmy, że tylko gdy $S_n = -r+1$ lub $S_n = r-1$ zachodzi możliwość, że gracz w następnym kroku straci wszystko. Niech $p_r(n)$ oznacza warunkowe prawdopodobieństwo osiągnięcia pozycji $-r+1$ lub $r-1$ w n krokach pod warunkiem pozostania do tego czasu w przedziale $[-r+1, r-1]$. Korzystając z powyższych wzorów, mamy

$$\begin{aligned} p_r(n) &= \mathbf{P}\left(S_n \in \{-r+1, r-1\} | S_0 = 0 \ \text{ oraz } \ S_1, S_2, \ldots, S_{n-1} \notin \{-r, r\}\right) \\ &= \frac{2\sum_{j=0}^{r-1}\left[\cos\frac{2j+1}{2r}\pi\right]^n (-1)^j \sin\frac{2j+1}{2r}\pi}{\sum_{j=0}^{r-1}\left[\cos\frac{2j+1}{2r}\pi\right]^n (-1)^j \operatorname{ctg}\frac{2j+1}{2r}\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że przy założeniu, że r jest nieparzyste, $p_r(n) = 0$ dla n nieparzystego.

Jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, tzn. $n = 2l$, to z powyższego wzoru łatwo można wykazać, że

$$\lim_{l\to\infty} p_r(2l) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right).$$

Własności ciągu $(p_r(2l))_l$ są istotne w dalszych rozważaniach dotyczących optymalnego czasu zatrzymania gry G_N. Z udowodnionego w pracy [H5] ogólniejszego faktu wynika, że ciąg $(p_r(2l))_l$ jest niemalejący dla $l \geq 0$.

2.5.1 Optymalny czas zatrzymania oraz wartość wygranej w grze G_N

Niech $\mathcal{B}(X)$ oznacza rodzinę zbiorów borelowskich w przestrzeni metrycznej X. Niech $P_{\{-1,1\}}(\{-1\}) = \frac{1}{2}, P_{\{-1,1\}}(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Kostka Cantora $C = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ jest przeliczalną potęgą kartezjańską zbioru $\{-1,1\}$. Niech P_C będzie miarą na $\mathcal{B}(C)$, która jest produktem przeliczalnie wielu kopii $P_{\{-1,1\}}$. Niech P będzie miarą $\mathcal{B}(C^N)$, która jest iloczynem N kopii miary P_C. Zauważmy, że każda $\omega \in C^N$ opisuje ciąg N trajektorii spaceru losowego na $\mathbb{Z}$, z których każda zaczyna się w 0. W rzeczywistości rozważamy tylko zdarzenie Ω składające się z tych $\omega \in C^N$, dla których spacer osiąga r lub $-r$ w każdej rundzie. Oczywiście, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ i Ω jest borelowskim podzbiorem zbioru C^N. Zatem zdarzenia elementarne $\omega \in \Omega$ są w istocie skończonymi ciągami o wyrazach -1 i 1.

Niech $X_t^{(N)}(\omega)$ oznacza wygraną (potencjalną; o ile zdecydowalibyśmy się zatrzymać) w bieżącej rundzie w czasie t, gdzie $\omega \in \Omega$.

Niech $\rho_0(\omega) = 0$ dla każdego $\omega \in \Omega$ oraz niech $\rho_k(\omega)$ oznacza czas, w którym podczas k-ej rundy spacer osiąga jeden z końców r lub $-r$, gdzie $1 \leq k \leq N$. Zauważmy, że wówczas $\rho_1(\omega) = T_r(\omega)$. Proces stochastyczny $X^{(N)}$ definiujemy następująco: dla każdego m, $0 \leq m < N$,

$$X_t^{(N)}(\omega) = t - (\rho_0(\omega) + \ldots + \rho_m(\omega)),$$

gdy t spełnia warunek

$$\rho_0(\omega) + \ldots + \rho_m(\omega) \leq t < \rho_0(\omega) + \ldots + \rho_m(\omega) + \rho_{m+1}(\omega)$$

oraz

$$X_t^{(N)}(\omega) = 0 \;\text{ dla }\; t \geq \rho_1(\omega) + \ldots + \rho_N(\omega).$$

Naszym celem jest wyznaczenie optymalnego czasu zatrzymania ξ_N gry G_N, który maksymalizuje wartość oczekiwaną wygranej $EX_\xi^{(N)}$ względem wszystkich czasów zatrzymania ξ dla filtracji generowanej przez proces $X^{(N)}$. Niech e_N oznacza wartość oczekiwaną wygranej przy zastosowaniu optymalnego czasu zatrzymania w całej grze G_N. Załóżmy, że $e_0 = 0$. Jeśli pierwsza runda zakończy się bez wygranej tzn. osiągnęliśmy w czasie spaceru jeden z punktów końcowych $-r$ lub r, wtedy rozgrywana jest gra G_{N-1}. W pracy pokazujemy, że proces stochastyczny pierwszej rundy gry G_N rozszerzony o zmienną losową opisującą optymalne zachowanie w pozostałej grze G_{N-1} spełnia założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym. Dla znalezienia optymalnego czasu zatrzymania gry składającej się z N rund stosujemy rekursję ze względu na N. Wystarczy zatem zdecydować, kiedy zatrzymać się w pierwszej rundzie gry (zakładając, że jeśli zatrzymujemy się w ostatnim momencie - $T_r(\omega)$, to gramy optymalnie pozostałą część gry - G_{N-1}). Definiujemy rekurencyjnie proces

$$Z_t^{(N)}(\omega) = \begin{cases} X_t^{(N)}(\omega), & gdy \quad t \leq T_r(\omega), \\ Y(\omega), & gdy \quad t > T_r(\omega), \end{cases}$$

gdzie $Y(\omega) = Z^{(N-1)}_{\xi_{N-1}(\omega^{(1)})}(\omega^{(1)})$ jest równe wypłacie w grze G_{N-1} składającej się z $N-1$ rund przy zastosowaniu optymalnego czasu zatrzymania ξ_{N-1} oraz $\omega^{(1)} = \left\langle \omega_{T_r(\omega)+1}, \omega_{T_r(\omega)+2}, \ldots \right\rangle$ oznacza spacer w pozostałej części gry po zakończeniu pierwszej rundy. Dla skrócenia zapisu w dalszej części pracy piszemy Z zamiast $Z^{(N)}$, ponieważ N jest ustalone. Niech $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z_1, \ldots, Z_t\}$.

Zauważmy, że gdy r jest nieparzyste, to dla t nieparzystego (o ile spacer nie osiągnął punktów granicznych), spacer znajduje się co najmniej dwa kroki od barier r lub $-r$ i gracz może bezpiecznie wykonać kolejny krok, aby zwiększyć swoją wygraną. Zatem jedyne sensowne czasy zatrzymania są dla t parzystego i dlatego przy poszukiwaniu optymalnego czasu zatrzymania wystarczy rozważać tylko czasy parzyste.

Niech

$$t_N = \min\{t : t \text{ jest parzyste oraz } t \geq e_{N-1} + \frac{4}{p_r(t)} - 2\}. \tag{2.23}$$

W pracy udowodnione zostało następujące twierdzenie podające optymalny czas zatrzymania dla gry G_N i oczekiwaną wartość wygranej.

Twierdzenie 1 ([H4], Theorem 3.2). *Dla każdego $N \geq 1$ optymalny czas zatrzymania* *maksymalizujący wartość oczekiwaną EZ_τ względem wszystkich czasów zatrzymania τ dla filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$ jest postaci*

$$\tau_N(\omega) = \begin{cases} t_N, & \textit{gdy } t_N < T_r(\omega), \\ T_r(\omega) + 1, & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{2.24}$$

Oczekiwana wartość wygranej jest wówczas równa

$$EZ_{\tau_N} = e_N = t_N \cdot \boldsymbol{P}(T_r > t_N) + e_{N-1} \cdot (1 - \boldsymbol{P}(T_r > t_N)). \tag{2.25}$$

W dowodzie pokazujemy, że proces Z_{2i} spełnia założenie twierdzenia o przypadku monotonicznym.

Pokazujemy, że dla $2i < T_r(\omega)$ zachodzi implikacja:

$$Z_{2i}(\omega) \geq E(Z_{2i+2}|\mathcal{F}_{2i})(\omega) \Rightarrow Z_{2i+2}(\omega) \geq E(Z_{2i+4}|\mathcal{F}_{2i+2})(\omega). \tag{2.26}$$

Zauważmy, że

$$E(Z_{2i+2}|\mathcal{F}_{2i})(\omega) = \frac{p_r(2i)}{2} \cdot e_{N-1} + \left(1 - \frac{p_r(2i)}{2}\right)(2i+2).$$

(Pierwszy składnik sumy odpowiada za prawdopodobieństwo osiągnięcia barier w czasie $2i+1$ - wtedy gracz gra optymalnie grę G_{N-1}, a drugi składnik odpowiada za wygraną, jeśli gracz zatrzyma się w pierwszej rundzie w czasie $2i+2$.)

Rozważamy dwa przypadki: gdy $2i < T_r(\omega) - 1$ oraz gdy $2i = T_r(\omega) - 1$. W pierwszym przypadku powyższa implikacja jest równoważna implikacji

$$2i \geq \frac{p_r(2i)}{2} e_{N-1} + \left(1 - \frac{p_r(2i)}{2}\right)(2i+2)$$

$$\Rightarrow 2i+2 \geq \frac{p_r(2i+2)}{2} e_{N-1} + \left(1 - \frac{p_r(2i+2)}{2}\right)(2i+4).$$

Poprzednik tej implikacji można zapisać w postaci

$$\frac{p_r(2i)}{2}(2i+2-e_{N-1}) \geq 2.$$

Z monotoniczności ciągu $(p_r(2l))_l$ (istotnie wykorzystujemy tu wynik z pracy [H5]), otrzymujemy następnik implikacji (2.26).

Rozważmy teraz przypadek $2i = T_r(\omega) - 1$. Wówczas następnik implikacji (2.26) jest postaci $Y(\omega) \geq Y(\omega)$, co jest zawsze prawdą. Zatem istotnie mamy do czynienia z przypadkiem monotonicznym.

Stąd optymalny czas zatrzymania ma postać

$$\tau(\omega) = \min\{i : E(Z_{2i+1}|\mathcal{F}_{2i})(\omega) \leq Z_{2i}(\omega)\}.$$

(Spełnienie dodatkowych założeń związanych z twierdzeniem o przypadku monotonicznym dla procesu z czasem nieskończonym (tu a priori mamy taką sytuację) wyjaśnione jest szczegółowo w omawianej tu pracy - dowód twierdzenia 3.1.)

Załóżmy, że gramy pierwszą rundę gry G_N. Jeśli t jest parzyste, to wypłata gracza w czasie t wynosi t. Natomiast wartość oczekiwana wypłaty, jeśli zamierzamy grać dalej i zatrzymać się w czasie $t+2$, wynosi

$$\frac{p_r(t)}{2} \cdot e_{N-1} + \left(1 - \frac{p_r(t)}{2}\right)(t+2).$$

Nierówność

$$t \geq \frac{p_r(t)}{2} \cdot e_{N-1} + \left(1 - \frac{p_r(t)}{2}\right)(t+2)$$

wyznaczająca optymalny czas zatrzymania (minimalne takie t spełniające tę nierówność), jest równoważna nierówności $t \geq e_{N-1} + \frac{4}{p_r(t)} - 2$, a ta z kolei jest równoważna warunkowi $t \geq t_N$.

W pracy podane są przykłady gier i optymalnych strategii dla różnych r i N.

2.5.2 Asymptotyka

Przedstawimy teraz wyniki dotyczące asymptotycznego zachowania się wartości oczekiwanej wygranej e_N.

Niech $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ będą ciągami. Piszemy $a_n \sim b_n$, jeśli $a_n/b_n \to 1$ gdy $n \to \infty$.

Funkcja e_N jest funkcją rosnącą wraz z N i jest nieograniczona przy $N \to \infty$. W pracy zostało pokazane, że e_N rośnie logarytmicznie, tzn. $e_N \sim \log_{\frac{1}{\beta}} N$.

Twierdzenie 2 ([H4], Theorem 4.1). *Wartość oczekiwana e_N gry G_N spełnia następujący warunek graniczny*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{e_N}{\log_{\frac{1}{\beta}}(N)} = 1,$$

gdzie $\beta = \cos\frac{\pi}{2r}$.

W dowodzie tego twierdzenia korzystamy najpierw z (2.23), skąd mamy

$$e_{N-1} + \frac{4}{p_r(t_N)} > t_N \geq e_{N-1} + \frac{4}{p_r(t_N)} - 2, \tag{2.27}$$

co daje

$$\frac{4}{p_r(t_N)} > t_N - e_{N-1} \geq \frac{4}{p_r(t_N)} - 2.$$

Następnie, korzystając z (2.25), otrzymujemy nierówność

$$\mathbf{P}\left(T_r > t_N\right) \frac{4}{p_r(t_N} > e_N - e_{N-1} \geq \mathbf{P}\left(T_r > t_N\right)\left(\frac{4}{p_r(t_N)} - 2\right). \tag{2.28}$$

Dla $N \to \infty$ mamy $t_N \to \infty$. Zatem z (2.22) otrzymujemy

$$\mathbf{P}\left(T_r > t_N\right) \sim \frac{2}{r} \frac{\left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)^{t_N}}{\sin\left(\frac{\pi}{2r}\right)}. \tag{2.29}$$

Następnie w pracy wykazujemy, że

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4}{p_r(t_N)} = \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)}. \tag{2.30}$$

Z (2.27), (2.28), (2.29) oraz (2.30) istnieje takie N_0, że dla każdego $N \geq N_0$, mamy

$$C\left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)^{e_{N-1}} \geq e_N - e_{N-1} \geq c\left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)^{e_{N-1}}, \tag{2.31}$$

gdzie c i C są dodatnimi stałymi, które spełniają następujące warunki:

$$c < \frac{4}{r \sin^3 \frac{\pi}{2r}} \left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)}+2}$$

oraz

$$C > \frac{4}{r \sin^3 \frac{\pi}{2r}} \left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right)}-2}.$$

W pracy (Appendix), dowodzimy, że dowolny ciąg $(a_n)_n$ spełniający rekurencję $a_{n+1} = a_n + c_n\beta^{a_n}$, gdzie $C \geq c_n \geq c > 0$, $0 < \beta < 1$, jest logarytmicznie rosnący. Mianowicie, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{\frac{1}{\beta}}(n)}{a_n} = 1.$$

Z powyższego faktu i z (2.31) wynika teza twierdzenia 2.

2.6 Praca [H5]

Niech $I = \{-r, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r\}$ będzie dyskretnym symetrycznym przedziałem oraz $V : \{0, 1, \ldots\} \to \mathbb{Z}$ oznacza spacer losowy na liczbach całkowitych startujący punkcie 0. Rozważmy tylko takie trajektorie spacerów V, które nie wychodzą poza przedział I.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że pozycja spaceru losowego, który nie wyjdzie poza przedział I do czasu t, w chwili t jest w punkcie $k \in I$, oznaczamy przez

$$P_k(t) := \mathbf{P}[V(t) = k | \{V(0), \ldots, V(t)\} \subseteq I].$$

Niech $T_s = \{-r, \ldots, -s\} \cup \{s, \ldots, r\}$ oznacza ogon, gdzie $s \in I$, $s \geq 0$ (s determinuje rozmiar zbioru T_s). Przez $p(s,t)$ rozumiemy następujące prawdopodobieństwo warunkowe

$$p(s,t) := \mathbf{P}[V(t) \in T_s | \{V(0), \ldots, V(t)\} \subseteq I].$$

Oczywiście $p(s,t) = 2\sum_{k=s}^{r} P_k(t)$ dla $s > 0$ oraz $p(0,t) = 1$.

W pracy dowodzimy następującą zależność rekurencyjną dla $P_k(t)$ (Appendix).

Lemat ([H5], Lemma 1).

$$P_k(t) = \frac{P_{k-1}(t-1) + P_{k+1}(t-1)}{2(1 - P_r(t-1))}$$

dla $-r < k < r$,

$$P_r(t) = \frac{P_{r-1}(t-1)}{2(1 - P_r(t-1))}$$

oraz

$$P_{-r}(t) = \frac{P_{-r+1}(t-1)}{2(1 - P_r(t-1))}.$$

Głównym wynikiem omawianej pracy jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([H5], Theorem 1). *Dla każdej nieujemnej liczby $s \in I$ ciągi*

$$(p(s, 2u))_u \quad \textit{oraz} \quad (p(s, 2u+1))_u$$

są niemalejące.

Rozważamy przypadek, gdy r jest parzyste (dla r nieparzystego dowód jest analogiczny). Dla $r = 2$ teza jest oczywista. Zakładamy więc, że $r \geq 4$. Dowód tego twierdzenia jest indukcyjny ze względu na $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla wszystkich wartości s, $0 \leq s \leq r$. Dla $s = 0$ mamy $p(0,t) = 1$ dla każdego t. Zatem zakładamy, że $s > 0$.

Łatwo można sprawdzić, że dla dowolnego $s \leq r$ zachodzą nierówności $p(s,0) \leq p(s,2)$ oraz $p(s,1) \leq p(s,3)$. Załóżmy zatem, że t jest nieparzyste, $t \geq 3$ oraz $p(s,n) \leq p(s,n+2)$ dla każdego $0 \leq n \leq t-2$. Dowodzimy, że przy tych założeniach prawdziwe są nierówności

$$p(s,t-1) \leq p(s,t+1) \tag{2.32}$$

oraz

$$p(s,t) \leq p(s,t+2) \tag{2.33}$$

dla każdego $s \leq r$.

Przedstawimy najpierw szkic dowodu nierówności (2.32). Załóżmy, że $t = 2v+1$. Wówczas, korzystając z rekurencyjnej formuły dla $P_k(t)$ oraz faktu, że $P_r(2v+1) = 0$, mamy

$$p(s,2v+2) = 2\sum_{i=s}^{r} P_i(2v+2) = \sum_{i=s}^{r-1}(P_{i-1}(2v+1) + P_{i+1}(2v+1)) + P_{r-1}(2v+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(p(s-1,2v+1) + p(s,2v+1)\right).$$

W ten sam sposób pokazujemy, że

$$p(s,2v) = \frac{1}{2}\left(p(s-1,2v-1) + p(s,2v-1)\right).$$

Z założenia indukcyjnego dla ciągu $(p(s,2u+1))_{u=0}^{v}$, mamy

$$p(s-1,2v+1) \geq p(s-1,2v-1)$$

oraz

$$p(s,2v+1) \geq p(s,2v-1).$$

Zatem

$$p(s,t+1) = p(s,2v+2) \geq p(s,2v) = p(s,t-1).$$

Dowód nierówności (2.33) jest trudniejszy, ponieważ nie możemy wyrazić prawdopodobieństwa $p(s,t)$ jako sumy dwóch prawdopodobieństw o mniejszych wartościach t, tak jak mogliśmy to zrobić dla (2.32). W dowodzie (2.33) korzystamy z następującego faktu.

Fakt ([H5], Claim). *Jeśli $N \geq M$, $N, M \in \mathbb{N}$, oraz $0 \leq s \leq r$, to*

$$p(s,2N+1) = 4^{M-N}\prod_{i=M}^{N}\alpha(2i)\sum_{j=1}^{\frac{r}{2}} A_{2j}^{(s)}(N-M)P_{2j}(2M) + \sum_{l=M}^{N}\beta_{N-l}^{(s)}\prod_{k=l+1}^{N}\alpha(2k), \tag{2.34}$$

gdzie $\alpha(t) = (1 - P_r(t))^{-1}$, $\beta_m^{(s)}$ *są nieujemnymi stałymi, które zależą tylko od* m *i* s *dla* $0 \leq m \leq M$, *oraz* $A_{2j}^{(s)}(N-M) \geq 0$ *jest stałą zależną tylko od* $N-M$ *i* s. *Produkty, w których dolna granica mnożenia jest większa niż górna, są definiowane jako 1. Ponadto,*

$$A_{2j+2}^{(s)}(N-M) \leq A_{r-2j}^{(s)}(N-M) \tag{2.35}$$

dla $0 \leq j \leq (r-2)/4$.

Dowód powyższego faktu przeprowadzamy indukcyjnie ze względu na M, gdzie $N \geq M \geq 0$.

Zauważmy, że dla $M = 0$ po prawej stronie (2.34) pojawiają się czynniki $P_{2j}(0) = 0$ (dla $j > 0$). Ta uwaga faktycznie wystarczy do udowodnienia tezy twierdzenia 1. W indukcyjnym dowodzie równości (2.34) "schodzimy" z M od wartości $M = N$ do $M = 0$, kolejno definiując stałe $A(N-M)$ i β_{N-M}.

Niech zatem $M = N$ (pierwszy krok indukcyjny) oraz niech $s = 2k+1$ (bez utraty ogólności możemy założyć, że gdy $t = 2N+1$, to s również jest nieparzyste). Zauważmy, że gdy $s = 1$ i t jest nieparzyste, to $p(1, 2n+1) = 1$. Możemy zatem założyć, że $k > 0$. Wówczas mamy

$$p(s, 2N+1) = 2\sum_{j=k}^{\frac{r-2}{2}} P_{2j+1}(2N+1)$$

$$= \alpha(2N)\sum_{j=k}^{\frac{r-2}{2}}(P_{2j}(2N) + P_{2j+2}(2N)) = \alpha(2N)\left(P_{2k}(2N) + \sum_{j=k+1}^{\frac{r-2}{2}} 2P_{2j}(2N) + P_r(2N)\right),$$

(korzystamy z rekurencji dla $P_k(t)$). Ustalamy $A_{2j}^{(s)}(0) = 0$ dla $j < k$, $A_{2k}^{(s)}(0) = 1$, $A_{2j}^{(s)}(0) = 2$ dla $k < j < \frac{r}{2}$ oraz $A_r^{(s)}(0) = 1$, jak również $\beta_0^{(s)} = 0$. Przy tak ustalonych stałych dowodzona teza jest prawdziwa.

Załóżmy teraz, że warunki (2.34) i (2.35) zachodzą dla $0 < M \leq N$. Pokażemy szkic dowodu, że oba te warunki zachodzą również dla $M-1$. Z założenia mamy

$$p(s, 2N+1) = 4^{M-N}\prod_{i=M}^{N}\alpha(2i)\sum_{j=1}^{\frac{r}{2}} A_{2j}^{(s)}(N-M)P_{2j}(2M) + \sum_{l=M}^{N}\beta_{N-l}^{(s)}\prod_{k=l+1}^{N}\alpha(2k).$$

Korzystając z rekurencyjnej zależności dla $P_k(t)$ podanej w lemacie, prawą stronę możemy przedstawić w następującej postaci:

$$4^{M-N}\prod_{i=M}^{N}\alpha(2i)\alpha(2M-2)\frac{1}{4}\Bigg(A_2^{(s)}(N-M)(P_0(2M-2) + P_2(2M-2))$$

$$+\sum_{j=1}^{\frac{r-2}{2}}(A^{(s)}_{2j}(N-M)+A^{(s)}_{2j+2}(N-M))(P_{2j}(2M-2)+P_{2j+2}(2M-2))\Bigg)$$

$$+\sum_{l=M}^{N}\beta^{(s)}_{N-l}\prod_{k=l+1}^{N}\alpha(2k),$$

co z kolei, dokonując odpowiednich podstawień, można przedstawić w następującej postaci:

$$4^{M-1-N}\prod_{i=M-1}^{N}\alpha(2i)\sum_{j=0}^{\frac{r}{2}}B_{2j}P_{2j}(2M-2)+\sum_{l=M}^{N}\beta^{(s)}_{N-l}\prod_{k=l+1}^{N}\alpha(2k),$$

gdzie $B_0=A^{(s)}_2(N-M)$, $B_2=2A^{(s)}_2(N-M)+A^{(s)}_4(N-M)$, $B_{2j}=A^{(s)}_{2j-2}(N-M)+2A^{(s)}_{2j}(N-M)+A^{(s)}_{2j+2}(N-M)$, $1<j\leq\frac{r-2}{2}$ oraz $B_r=A^{(s)}_{r-2}(N-M)+A^{(s)}_r(N-M)$.

Po kolejnych kilku przekształceniach i podstawieniach, ostatnie wyrażenie zapisujemy w postaci

$$4^{M-1-N}\prod_{i=M-1}^{N}\alpha(2i)\sum_{j=1}^{\frac{r}{2}}A^{(s)}_{2j}(N-M+1)P_{2j}(2M-2)+\sum_{l=M-1}^{N}\beta^{(s)}_{N-l}\prod_{k=l+1}^{N}\alpha(2k),$$

gdzie $A^{(s)}_{2j}(N-M+1)=B_{2j}-2B_0$, $j\leq\frac{r-2}{2}$, $A^{(s)}_r(N-M+1)=B_r-B_0$ oraz $\beta^{(s)}_{N-M+1}=4^{M-N-1}B_0$, co kończy dowód równości (2.34).

Pozostało jeszcze sprawdzić, że współczynniki $A^{(s)}_{2j+2}(N-M+1)$ spełniają nierówność (2.35). Najpierw dowodzimy, że nierówność (2.35) zachodzi dla $j=0$. Mianowicie, korzystając z powyższych podstawień, mamy

$$A^{(s)}_2(N-M+1)=B_2-2B_0=A^{(s)}_4(N-M)\geq 0$$

oraz

$$A^{(s)}_r(N-M+1)=B_r-B_0=A^{(s)}_{r-2}(N-M)+A^{(s)}_r(N-M)-A^{(s)}_2(N-M).$$

Zatem nierówność $A^{(s)}_2(N-M+1)\leq A^{(s)}_r(N-M+1)$ jest równoważna nierówności

$$A^{(s)}_4(N-M)\leq A^{(s)}_{r-2}(N-M)+A^{(s)}_r(N-M)-A^{(s)}_2(N-M),$$

co jest prawdą, ponieważ z założenia indukcyjnego mamy $A^{(s)}_4(N-M)\leq A^{(s)}_{r-2}(N-M)$ oraz $A^{(s)}_2(N-M)\leq A^{(s)}_r(N-M)$.

W analogiczny sposób rozważamy przypadek $0<j\leq\frac{r-6}{4}$. Dwa szczególne przypadki: $j=\frac{r-2}{4}$ i $j=\frac{r-4}{4}$ rozważamy osobno.

Stosując powyższy fakt dla $N = \frac{t+1}{2}$ i $M = 1$, otrzymujemy

$$p(s, t+2) = 4^{-\frac{t-1}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{t+1}{2}} \alpha(2i) \sum_{j=1}^{\frac{r}{2}} A_{2j}^{(s)} \binom{t-1}{2} P_{2j}(2) + \sum_{l=1}^{\frac{t+1}{2}} \beta_{\frac{t+1}{2}-l}^{(s)} \prod_{k=l+1}^{\frac{t+1}{2}} \alpha(2k)$$

oraz dla $N = \frac{t-1}{2}$ i $M = 0$:

$$p(s, t) = 4^{-\frac{t-1}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} \alpha(2i) \sum_{j=1}^{\frac{r}{2}} A_{2j}^{(s)} \binom{t-1}{2} P_{2j}(0) + \sum_{l=0}^{\frac{t-1}{2}} \beta_{\frac{t-1}{2}-l}^{(s)} \prod_{k=l+1}^{\frac{t-1}{2}} \alpha(2k)$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{t-1}{2}} \beta_{\frac{t-1}{2}-l}^{(s)} \prod_{k=l+1}^{\frac{t-1}{2}} \alpha(2k),$$

ponieważ $P_{2j}(0) = 0$ dla $j > 0$.

Wystarczy teraz pokazać, że zachodzi nierówność

$$\sum_{l=1}^{\frac{t+1}{2}} \beta_{\frac{t+1}{2}-l}^{(s)} \prod_{k=l+1}^{\frac{t+1}{2}} \alpha(2k) \geq \sum_{l=0}^{\frac{t-1}{2}} \beta_{\frac{t-1}{2}-l}^{(s)} \prod_{k=l+1}^{\frac{t-1}{2}} \alpha(2k).$$

Powyższą nierówność dowodzimy najpierw przesuwając indeks sumowania po lewej stronie nierówności, a następnie porównując kolejne składniki sum po obu stronach nierówności, tzn. pokazując, że dla każdego $l \in \{0, \ldots, \frac{t-1}{2}\}$ zachodzi zależność

$$\prod_{k=l+2}^{\frac{t+1}{2}} \alpha(2k) \geq \prod_{k=l+1}^{\frac{t-1}{2}} \alpha(2k).$$

Z założenia indukcyjnego mamy

$$P_r(2k+2) = \frac{p(r, 2k+2)}{2} \geq \frac{p(r, 2k)}{2} = P_r(2k).$$

Wynika stąd, że

$$\alpha(2k+2) \geq \alpha(2k),$$

ponieważ funkcja $f(x) = (1-x)^{-1}$ jest rosnąca dla $x \in [0, 1)$. Zatem

$$\prod_{k=l+2}^{\frac{t+1}{2}} \alpha(2k) = \prod_{k=l+1}^{\frac{t-1}{2}} \alpha(2k+2) \geq \prod_{k=l+1}^{\frac{t-1}{2}} \alpha(2k),$$

co kończy dowód twierdzenia 1.

Zauważmy, że dla czasów t o ustalonej parzystości prawdopodobieństwa pozostania w jakimkolwiek ustalonym scentrowanym przedziale tworzą ciąg nierosnący. W szczególności ciąg $(P_0(2t))_t$ prawdopodobieństw pozostania w środku przedziału jest nierosnący.

Szczególny przypadek twierdzenia 1, a mianowicie fakt, że ciąg $(P_r(t))_t$ jest niemalejący, jest istotny dla rozwiązania problemu optymalnego zatrzymania dotyczącego spaceru losowego na przedziale rozważanego w pracy [H4].

2.7 Praca [H6]

W pracy [H6] rozważane jest następujące zagadnienie.

Załóżmy, że wybieramy losowo n liczb rzeczywistych z przedziału $[0,1]$ z rozkładem jednostajnym. Liczby te przedstawiane nam są jedna po drugiej. Założmy, że n znamy z góry, a po ujawnieniu t liczb, $1 \leq t \leq n$, nie ich wartości a jedynie tylko ich względne rangi.

Naszym zadaniem jest zatrzymać się na aktualnym elemencie, maksymalizując prawdopodobieństwo, że ukryta za nim liczba, jest najbliższa $\frac{1}{2}$. W pracy podajemy optymalny algorytm zatrzymania i udowadniamy, że dla dużych n prawdopodobieństwo sukcesu jest rzędu $\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Zauważmy, że zatrzymanie się na elemencie średniej rangi nie gwarantuje, że liczba ta będzie najbliższa wartości $\frac{1}{2}$. Zauważmy również, że zatrzymanie się także na innych elementach daje niezerowe prawdopodobieństwo sukcesu.

2.7.1 Optymalny algorytm zatrzymania

Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ oznaczają wybrane elementy (przypomnijmy, że kryją się za nimi liczby, których wartości nie znamy). Zmieńmy ich nazwy tak, że w momencie t znamy ich kolejność $y_1^{(t)} < y_2^{(t)} < ... < y_t^{(t)}$ i wiemy, że ranga x_t to r. Oznacza to, że $x_t = y_r^{(t)}$. Naszym celem jest zatrzymanie się na aktualnie badanym elemencie x_t maksymalizując prawdopodobieństwo, że będzie najbliżej środka przedziału, czyli prawdopodobieństwo zdarzenia, że $|x_t - \frac{1}{2}| \leq |x_i - \frac{1}{2}|$ dla wszystkich i, $1 \leq i \leq n$ jest maksymalne. Takie zdarzenie nazywamy „x_t jest najlepsze".

Przed skonstruowaniem optymalnego algorytmu zatrzymania (algorytm ten oznaczamy przez $\mathcal{A}_n$) wyprowadzimy wzór na prawdopodobieństwo, że element o określonej randze jest najlepszy (w wyżej podanym sensie).

Twierdzenie 1 ([H6], Theorem 2.1). *Jeśli $y_1 < y_2 < ... < y_r < ... < y_n$ są uporządkowanymi według rangi (a nie czasu pojawienia) wszystkimi elementami, które się pojawią, to*

$$\boldsymbol{P}(y_r \textit{ jest najlepsze}) = \binom{n-1}{r-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dowód tego twierdzenia przebiega następująco.

Prawdopobieństwo zdarzenia, że liczba y_r leży najbliżej $\frac{1}{2}$ jest równe

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(y_r \text{ jest najlepsze}) = \mathbf{P}\Big(\Big(y_r < \frac{1}{2} < y_{r+1}\Big) \text{ oraz } \Big(|y_r - \frac{1}{2}| \le |y_{r+1} - \frac{1}{2}|\Big)\Big). \\ + \mathbf{P}\Big(\Big(y_{r-1} < \frac{1}{2} < y_r\Big) \text{ oraz } \Big(|y_{r-1} - \frac{1}{2}| \ge |y_r - \frac{1}{2}|\Big)\Big).\end{aligned}$$

Następnie zauważmy, że

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\Big(\Big(|y_r - \frac{1}{2}| \le |y_{r+1} - \frac{1}{2}|\Big)\Big|\Big(y_r < \frac{1}{2} < y_{r+1}\Big)\Big) \\ &\qquad = \mathbf{P}\Big(\min\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\} < \min\{Z_{r+1}, Z_{r+2}, \ldots, Z_n\}\Big) = \frac{r}{n},\end{aligned}$$

gdzie $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładem jednostajnym na odcinku $[0, 1/2]$.

Analogicznie otrzymujemy

$$\mathbf{P}\Big(\Big(|y_{r-1} - \frac{1}{2}| \ge |y_r - \frac{1}{2}|\Big)\Big|\Big(y_{r-1} < \frac{1}{2} < y_r\Big)\Big) = \frac{n-r+1}{n}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(y_r \text{ jest najlepsze}) &= \binom{n}{r} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{r}{n} + \binom{n}{r-1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n-r+1}{n} \\ &= \frac{1}{2^n}\left[\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\right] = \binom{n-1}{r-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Twierdzenie 2 ([H6], Theorem 2.2). *Jeśli $y_1^{(t)} < y_2^{(t)} < \ldots < y_r^{(t)} < \ldots < y_t^{(t)}$ są uporządkowanymi według rangi elementami, które pojawiły się do czasu t, to*

$$\boldsymbol{P}(y_r^{(t)} \textit{ będzie najlepsze}) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-1}{r-1+j} \binom{n-t}{j} \frac{r^j (t+1-r)^{n-t-j}}{(t+1)^{n-t}}. \tag{2.36}$$

Naszkicujemy dowód tego twierdzenia.

W chwili t ranga elementu $y_r^{(t)}$ jest równa r, a ponieważ zostało $n-t$ elementów do zbadania, to ranga elementu $y_r^{(t)}$ wzrośnie o pewne j, gdzie $0 \le j \le n-t$. Każdy element następujący po $y_r^{(t)}$ wpadnie niezależnie z takim samym prawdopodobieństwem $\frac{1}{t+1}$ do jednego z przedziałów $(0, y_1^{(t)}), (y_1^{(t)}, y_2^{(t)}), \ldots, (y_t^{(t)}, 1)$. Za każdym razem, gdy element znajdzie się w jednym z pierwszych r przedziałów, ranga elementu $y_r^{(t)}$ zwiększy się o 1.

Zatem prawdopodobieństwo, że po zbadaniu wszystkich n elementów, ranga $y_r^{(t)}$ będzie równa $r + j$ wynosi

$$\binom{n-t}{j} \frac{r^j (t+1-r)^{n-t-j}}{(t+1)^{n-t}}.$$

Następnie z twierdzenia 1 wynika, że

$$\mathbf{P}(y_r^{(t)} \text{ będzie najlepsze} \mid \text{jego ranga jest równa } r+j) = \binom{n-1}{r-1+j}\frac{1}{2^{n-1}}$$

i stąd wynika następujący wzór

$$\mathbf{P}(y_r^{(t)} \text{ będzie najlepsze}) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-t}\binom{n-1}{r-1+j}\binom{n-t}{j}\frac{r^j(t+1-r)^{n-t-j}}{(t+1)^{n-t}}.$$

Rozważmy zbiór wszystkich algorytmów, które zatrzymują się tylko w rundach t, $t+1,...,n-1$ lub n (czyli nigdy nie zatrzymują się przed czasem t). Przez $\mathcal{A}_n^{(t)}$ oznaczamy optymalny algorytm należący do tego zbioru. Optymalny algorytm konstruujemy używając rekursji wstecznej.

Przymijmy dla skróconego zapisu, że $P_r^{(t)}$ oznacza $\mathbf{P}(y_r^{(t)}$ będzie najlepsze).

$\mathcal{A}_n^{(n)}$ oznacza taki algorytm, który zatrzymuje się tylko na liczbie, która wypadła w ostatniej rundzie. Stąd

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(n)} \text{ odnosi sukces}) = \frac{1}{n}.$$

Algorytm $\mathcal{A}_n^{(n-1)}$ zatrzymuje się tylko w rundach $n-1$ lub n. Zatrzymujemy się na elemencie $y_r^{(n-1)}$ w rundzie $n-1$, jeśli $P_r^{(n-1)} \geq \frac{1}{n}$. Korzystając ze wzoru z twierdzenia 2 dla $t = n-1$, otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n-1}{r-1}\frac{n-r}{n} + \binom{n-1}{r}\frac{r}{n}\right] \geq \frac{1}{n},$$

co jest równoważne nierówności

$$\binom{n-2}{r-1} \geq \frac{2^{n-2}}{n-1}.$$

Rozwiązując tę nierówność ze względu na $r-1$, otrzymujemy symetryczny przedział z rzędu $n-2$ trójkąta Pascala, a mianowicie $r-1 \in [z_1,\ n-2-z_1]$ dla pewnego z_1, lub oznaczając $r_1 = z_1+1$, $r \in [r_1,\ n-r_1]$.

Zatem algorytm $\mathcal{A}_n^{(n-1)}$ zatrzymuje się w rundzie $n-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy ranga elementu, który pojawia się w tej rundzie, należy do przedziału (obszaru zatrzymania) $[r_1,\ n-r_1]$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(n-1)} \text{ odnosi sukces}) = \sum_{r=r_1}^{n-r_1}\frac{1}{n-1}P_r^{(n-1)} + \frac{2(r_1-1)}{n-1}\frac{1}{n},$$

gdzie pierwszy składnik oznacza prawdopodobieństwo wygranej, jeśli ranga elementu w rundzie $n-1$ jest z przedziału $[r_1,\ n-r_1]$ lub (drugi składnik) spoza tego przedziału.

Ogólnie, załóżmy, że dla $k = t+1, t+2, \ldots, n$ znamy prawdopodobieństwa $\mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(k)}$ sukcesu) oraz obszar zatrzymania w rundzie k, czyli przedział $[r_{n-k},\ k+1-r_{n-k}]$. Wówczas algorytm optymalny $\mathcal{A}_n^{(t)}$ zatrzymuje się na liczbie $y_r^{(t)}$ w rundzie t wtedy i tylko wtedy, gdy jego ranga r spełnia nierówność

$$\mathrm{P}_r^{(t)} \geq \mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(t+1)} \text{ odnosi sukces}). \tag{2.37}$$

Jeśli istnieje rozwiązanie nierówności (2.37), to zbiór rozwiązań, czyli symetryczny przedział $[r_{n-t},\ t+1-r_{n-t}]$, jest obszarem zatrzymania dla algorytmu $\mathcal{A}_n^{(t)}$ w rundzie t oraz

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(t)} \text{ odnosi sukces}) = \sum_{r=r_{n-t}}^{t+1-r_{n-t}} \frac{1}{t} P_r^{(t)} + \frac{2(r_{n-t}-1)}{t} \mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(t+1)} \text{ odnosi sukces}). \tag{2.38}$$

Jeśli nie istnieje r spełniające nierówność (2.37), to algorytm $\mathcal{A}_n^{(t)}$ nigdy nie zatrzymuje się w rundzie t oraz

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(t)} \text{ odnosi sukces}) = \mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(t+1)} \text{ odnosi sukces}).$$

Optymalny algorytm dla naszego problemu optymalnego zatrzymania to $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^{(1)}$. Optymalną strategię $\mathcal{A}_n$ i odpowiadający jej zbiór prawdopodobieństw $\mathbf{P}(\mathcal{A}_n^{(t)}$ odnosi sukces), $t = 1, 2, \ldots, n$, obliczamy rekurencyjnie wstecz, stosując równość (2.38). Choć nie otrzymujemy zamkniętych wzorów na przedziały zatrzymania, to procedura ta daje możliwość efektywnych obliczeń numerycznych.

2.7.2 Asymptotyka

Zdefiniujemy teraz algorytm $\mathcal{A}(h_n, w_n)$, który nie jest optymalny, ale ma bardziej regularny obszar zatrzymania niż algorytm optymalny $\mathcal{A}_n$. Algorytm $\mathcal{A}(h_n, w_n)$ działa w następujący sposób:
Obszar zatrzymania algorytmu $\mathcal{A}(h_n, w_n)$ jest zdefiniowany przez dwie liczby naturalne h_n i w_n. Ten algorytm nigdy nie zatrzymuje się przed czasem h_n. Dla $t \geq h_n$, zatrzymuje się na x_t wtedy i tylko wtedy, gdy x_t przyjmuje wartość między $y^{(t-1)}_{\lceil \frac{t}{2} \rceil - w_n}$ a $y^{(t-1)}_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + w_n}$, gdzie $y_1^{(t-1)} < y_2^{(t-1)} < \ldots < y_{t-1}^{(t-1)}$ są uporządkowanymi liczbami w czasie $t-1$. Jeśli taka sytuacja nigdy się nie wydarzy, to algorytm $\mathcal{A}(h_n, w_n)$ zatrzymuje się na ostatniej liczbie x_n. Zauważmy, że obszar zatrzymania algorytmu $\mathcal{A}(h_n, w_n)$ jest prostokątem, gdzie $n - h_n + 1$ i $2w_n$ można interpretować odpowiednio jako wysokość i szerokość tego prostokąta.

W następnym twierdzeniu przedstawimy asymptotyczne oszacowanie algorytmu $\mathcal{A}(h_n, w_n)$. Stosujemy standardową notację: $f(n) \sim g(n)$, jeśli $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ oraz $f(n) = o(g(n))$, jeśli $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Twierdzenie 3 ([H6], Theorem 3.8). *Dla dowolnych ciągów liczb naturalnych h_n i w_n takich, że $h_n \le n, 4w_n^2 < n$ oraz $w_n = o(h_n)$ zachodzi nierówność*

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{A}(h_n, w_n) \textit{odnosi sukces}) \ge v(h_n, w_n),$$

gdzie $v(h_n, w_n)$ jest taką funkcją, że dla $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$v(h_n, w_n) \sim \frac{h_n}{n2^{n-1}} \binom{n-1}{\frac{n-1}{2} - w_n} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{2w_n}{h_n}\right)^{n-h_n}\right).$$

Następnie, przyjmując odpowiednie ciągi h_n i w_n, mianowicie $w_n = \lceil n^{1/3} \rceil$ oraz $h_n = \left\lceil n\left(1 - \frac{\sqrt{\ln n}}{n^{1/3}}\right)\right\rceil$, pokazujemy, że zachodzi następująca nierówność dla algorytmu $\mathcal{A}(h_n, w_n)$ ([H6], Corollary 3.9):

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\big(\mathcal{A}(h_n, w_n) \text{ odnosi sukces}\big) \ge \sqrt{n} v(h_n, w_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Stąd otrzymujemy dla odpowiednio dużych n dolne oszacowanie algorytmu $\mathcal{A}(h_n, w_n)$

$$\mathbf{P}\big(\mathcal{A}(h_n, w_n) \text{ odnosi sukces}\big) \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Wybór h_n nie jest przypadkowy. Liczba $\left\lceil n - n^{2/3}\sqrt{\ln n}\right\rceil$ oznacza liczbę rund, dla których algorytm $\mathcal{A}_n$ nie podejmie żadnej decyzji i otrzymaliśmy tę liczbę z obliczeń numerycznych stosując optymalny algorytm zatrzymania $\mathcal{A}_n$. Dla tych wyborów obszar zatrzymania algorytmu $\mathcal{A}(h_n, w_n)$ jest ograniczony od dołu przez funkcję, która asymptotycznie zachowuje się jak $\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Ponieważ optymalny algorytm $\mathcal{A}_n$ nie jest gorszy, ta dolna granica dotyczy także $\mathcal{A}_n$.

Pozostaje udowodnić, że asymptotycznie górna granica algorytmu $\mathcal{A}_n$ jest taka sama.

Aby znaleźć górną granicę, rozważamy następujący problem zatrzymania *on-line*, który jest znacznie łatwiejszy niż omawiany. Załóżmy, że losujemy n liczb z przedziału $[0, 1]$ niezależnie z rozkładem jednostajnym na $[0, 1]$. Liczby te są ujawniane jedna po drugiej i znamy ich względne rangi w dowolnym momencie t, $1 \le t \le n$. Po ujawnieniu wszystkich n liczb możemy wybrać dowolną liczbę, niekoniecznie ostatnią.

Nasz cel pozostaje taki sam: maksymalizacja prawdopodobieństwa wybrania elementu najbliższego $\frac{1}{2}$. Wówczas optymalna strategia jest prosta. Z twierdzenia 1 wiemy, że musimy wybrać liczbę o takiej randze r, aby współczynnik dwumianowy $\binom{n-1}{r-1}$ miał wartość maksymalną. Jest tak dla $r-1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ lub $r-1 = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Wówczas

$$\mathbf{P}\big(x_r \text{ jest najlepszy }\big) = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Stosując asymptotykę dla dużych n, $\binom{n}{n/2} \sim \frac{\sqrt{2}\cdot 2^n}{\sqrt{\pi n}}$, otrzymujemy

$$\mathbf{P}\big(x_r \text{ jest najlepszy }\big) = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sim \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{n-1}}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

a stąd wynika górne asymptotyczne ograniczenie algorytmu $\mathcal{A}_n$ i prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 ([H6], Theorem 3.10). *Prawdopodobieństwo sukcesu przy zastosowaniu rozważanego algorytmu $\mathcal{A}_n$, jest rzędu*

$$\boldsymbol{P}\big(\mathcal{A}_n \textit{ odnosi sukces}\big) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

2.8 Praca [H7]

Załóżmy, że wybieramy losowo n liczb rzeczywistych $X_1, X_2, ..., X_n$ z przedziału $[0, 1]$ z rozkładem jednostajnym. Liczby te przedstawiane nam są jedna po drugiej. Tak jak w poprzednio omawianej pracy, zakładamy, że n znamy z góry, a po ujawnieniu t liczb, $1 \leq t \leq n$, nie ich wartości a jedynie tylko ich względne rangi.

Naszym zadaniem teraz jest zatrzymać się na aktualnym elemencie, maksymalizując prawdopodobieństwo, że ukryta za nim liczba jest mniejsza niż $\frac{1}{n}$. Kiedy zatrzymamy się w czasie t, gra się kończy. Liczby $X_1, X_2, ..., X_t$ zostają odkryte i wygrywamy, jeśli $X_t < \frac{1}{n}$.

Powyższą procedurę wyboru możemy interpretować nawiązując do klasycznego problemu sekretarki jak również do problemu z pełną informacją. W przypadku klasycznego problemu wyboru najlepszej sekretarki porównujemy rangi elementów, które przyszły do tej pory i naszym celem jest wybranie aktualnej kandydatki, tak aby była najlepsza w całej puli. W przypadku problemu z pełną informacją przychodzą znane nam w momencie przybycia liczby z odcinka $[0, 1]$, a naszym celem jest wybranie aktualnej liczby, która okaże się na końcu najlepsza, czyli największa lub najmniejsza, zależnie od sformułowania problemu.

Rozważany tu model jest w pewnym sensie połączeniem wspomnianych dwóch - możemy porównać ze sobą kandydatki, ale ich obiektywna wartość pozostaje ukryta. Jeśli przyjmiemy, że ukryta liczba mierzy wady kandydatki, a dokonujemy wyboru jedynie na podstawie porównania rang, chcemy aby nasz wybór był dobry, tzn. dawał kandydatkę o małej, mniejszej niż $1/n$, mierze wad. Wybór progu akceptowalności jako $1/n$ też nie jest tu arbitralny. W klasycznym problemie oraz tym z pełną informacją jest tylko jedna kandydatka akceptowalna. Tu może ich być więcej lub nie być takiej wcale. Niemniej jednak, przy pojawianiu się n niezależnych od siebie rozłożonych jednostajnie liczb z odcinka $[0, 1]$ wartość oczekiwana liczby akceptowalnych kandydatek jest równa oczekiwanej liczbie sukcesów w schemacie Bernoulliego $B(n, 1/n)$, czyli 1.

W pracy podajemy optymalny algorytm zatrzymania i udowadniamy, że prawdopodobieństwo sukcesu przy użyciu tego algorytmu w przybliżeniu jest równe 0,289202.

2.8.1 Optymalny algorytm zatrzymania

Skonstruujemy optymalny algorytm zatrzymania (innymi słowy czas zatrzymania) τ taki, że τ maksymalizuje prawdopodobieństwo $\mathbf{P}[x_\tau \leq 1/n]$ dla wszystkich czasów zatrzymania.

Mówimy, że czas zatrzymania τ jest *typu progowego*, jeśli dla pewnego ciągu liczb naturalnych

$$1 \leq s_1^{(n)} \leq s_2^{(n)} \leq \ldots \leq s_n^{(n)} = n$$

$\tau = t$, jeśli t jest pierwszym takim czasem, że ranga X_t jest co najwyżej j i $t \geq s_j^{(n)}$.

Naszkicujemy dowód, że rozważanym tu problemie optymalny czas zatrzymania jest właśnie typu progowego. Po pierwsze zauważamy (Lemma 1), że jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_t$ są elementami (ukrytymi liczbami, które porównujemy tylko co do rangi), które pojawiły się do czasu t, i ranga elementu X_t wśród tych liczb wynosi r, to

$$\mathbf{P}\left[X_t < 1/n\right] = \sum_{i=r}^{t} \binom{t}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-i}.$$

Równość tę w elementarnym rachunku wykorzystujemy, aby pokazać, że

$$\mathbf{P}[X_t \leq 1/n | \text{ranga } X_t \text{ wynosi } r] < \mathbf{P}[X_{t+1} \leq 1/n | \text{ranga } X_{t+1} \text{ wynosi } r].$$

Zakładamy teraz, że nie opłaca się zatrzymywać na elemencie rangi r w czasie $t+1$, tzn.

$$\mathbf{P}[X_{t+1} \leq 1/n | \text{ranga } X_{t+1} \text{ wynosi } r] < \mathbf{P}[X_{\tau_{t+2}} \leq 1/n],$$

gdzie τ_s oznacza optymalny czas zatrzymania, jeśli decyzja jest podejmowana od czasu s (tu oczywiście $s = t+2$). Zauważamy też, że optymalna gra od czasu $t+1$ jest zawsze lepsza niż od czasu $t+2$, ponieważ krok $t+1$ możemy po prostu opuścić:

$$\mathbf{P}[X_{\tau_{t+2}} \leq 1/n] \leq \mathbf{P}[X_{\tau_{t+1}} \leq 1/n].$$

Korzystając z powyższych trzech nierówności, otrzymujemy

$$\mathbf{P}[X_t \leq 1/n | \text{ranga } X_t \text{ wynosi } r] < \mathbf{P}[X_{\tau_{t+1}} \leq 1/n].$$

Zatem, jeśli nie opłaca się zatrzymywać na elemencie rangi r w czasie $t+1$ (co założyliśmy wyżej), to nie opłaca się zatrzymywać na elemencie rangi r w czasie t (Theorem 2). Stąd już łatwo wynika, że optymalny czas zatrzymania w rozpatrywanym tu zagadnieniu jest typu progowego.

Niech $\mathfrak{G}^{(n)}$ oznacza optymalną grę dla n liczb. Niech

$$1 \leq s_1^{(n)} \leq s_2^{(n)} \leq \ldots \leq s_n^{(n)} = n$$

będzie ciągiem progów. Dowodzimy, że progi te, zanim pewien z nich osiągnie wartość n, ściśle rosną, a wartość $s_i^{(n)} = n$, jest osiągana po raz pierwszy dla bardzo małego relatywnie do n indeksu i. Mianowicie zachodzi następujące twierdzenie (Theorem 4).

Twierdzenie 1. Jeśli optymalny algorytm $\tau^{(n)}$ zatrzymuje się w pewnym czasie $t < n$ na elemencie o randze r, to $r! < n$.

Dowód. Jeśli $\tau^{(n)}$ zatrzymuje się na elemencie o randze r i $\tau^{(n)} < t$, to z progowości algorytmu wynika, że w momencie $n-1$, jeśli dotąd się nie zatrzymaliśmy, też zatrzymamy się, jeśli element X_{n-1} będzie miał rangę r. To oznacza, że prawdopodobieństwo sukcesu w chwili $n-1$ jest większe niż w ostatnim momencie, czyli

$$\sum_{k=r}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1-k} > \frac{1}{n}. \tag{2.39}$$

Oznaczmy

$$a_k := \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1-k} > \frac{1}{n}.$$

Zauważamy, że

$$a_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{n-k}{n-1} a_{k-1}.$$

Z tego wzoru zastosowanego kolejno do k, $k-1$,...,1 łatwo otrzymujemy nierówność

$$a_k \leq \frac{a_0}{k!} \cdot \frac{n-2}{n-1}.$$

Zatem dla $r \geq 2$ (dla $r = 1$ twierdzenie jest oczywiście prawdziwe) otrzymujemy:

$$\sum_{k=r}^{n-1} a_k \leq a_0 \frac{n-2}{n-1} \sum_{k=r}^{n-1} \frac{1}{k!} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n-1} \sum_{k=r}^{n-1} \frac{1}{k!} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \sum_{k=r}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Ponieważ ostatnia suma jest r-tą resztą szeregu Maclaurina dla e^x, otrzymujemy szacowanie

$$\sum_{k=r}^{n-1} a_k \leq e^{-1} e^{\theta} \frac{1}{r!} < \frac{1}{r!},$$

skąd na podstawie (2.39)

$$r! < n.$$

Wiemy już, że prawdopodobieństwo, że dany element w czasie t znajduje się w przedziale $[0, 1/n]$ zależy tylko od względnej rangi X_t wśród elementów, które pojawiły się do tej pory: $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Intuicyjnie jest również jasne i można to łatwo sformalizować, że istnienie dowolnego algorytmu $\tau > t$ takiego, że

$$\mathbf{P}[X_\tau \leq 1/n] \geq \mathbf{P}[X_t \leq 1/n]$$

nie zależy od tego, co wydarzyło się do czasu t, uwzględniając jedynie względne rangi tych elementów. Z powyższych dwóch uwag wynika, że tylko względna ranga X_t wśród wszystkich $X_1, X_2, \dots, X_t$ decyduje o tym, czy wybierzemy X_t, czy też będziemy kontynuować proces badania kolejnych elementów. Na podstawie tej obserwacji optymalny algorytm τ każe nam zatrzymać się w chwili t na elemencie X_t wtedy i tylko wtedy, gdy prawdopodobieństwo, że X_t mieści się w przedziale $[0, 1/n]$ jest większe niż prawdopodobieństwo, że później wybierzemy jakieś $X_\tau \in [0, 1/n]$ (tj. $\tau > t$). Dlatego optymalny algorytm konstruujemy przez indukcję wsteczną.

Pewien element tej konstrukcji pojawił się już w dowodzie powyższego twierdzenia. Mianowicie dla kryterium zatrzymania się w czasie $n-1$ sprawdzamy, które rangi ewentualnie wybranych w czasie $n-1$ elementów zapewniają prawdopodobieństwo sukcesu większe niż dokonanie wyboru w czasie n, czyli rozwiązujemy ze względu na r nierówność

$$\mathbf{P}[X_{n-1} < 1/n | \text{ranga } X_{n-1} \text{ wynosi } r] > \mathbf{P}[X_n < 1/n]$$

czyli

$$\sum_{k=r}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1-k} > \frac{1}{n}.$$

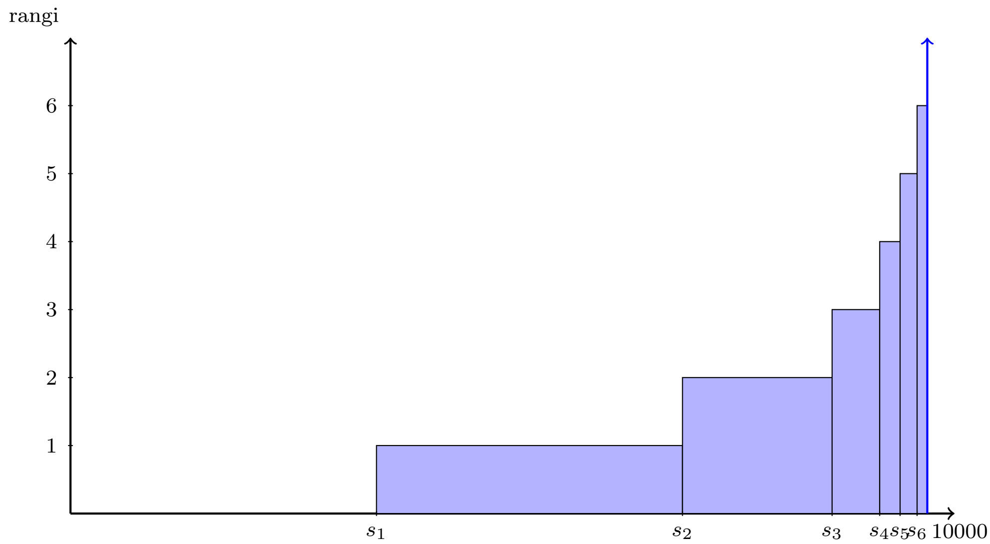
Ustaliwszy akceptowalne rangi $1, \dots, r_{n-1}$ elementów dla czasu zatrzymania $n-1$, możemy obliczyć optymalne prawdopodobieństwo $G_{n-1}^{(n)}$ sukcesu dla gry $\mathfrak{G}_{n-1}^{(n)}$, która zaczynałaby się od czasu $n-1$:

$$G_{n-1}^{(n)} = \sum_{r=1}^{r_{n-1}} \frac{1}{n-1} \sum_{i=r}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1-i} + \frac{n-1-r_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ustalenie wybieralnych rang w czasie $n-2$ przebiega analogiczne. Porównujemy prawdopodobieństwo sukcesu dla danej rangi r z jej wyborem w czasie $n-2$ i z szansą na sukces, jeśli zagramy grę $\mathfrak{G}_{n-1}^{(n)}$. Ta procedura (indukcja wsteczna) pozwala obliczyć numerycznie progi s_i. W pracy dowodzimy, że progi progi s_i rosną istotnie, dopóki nie osiągną wartości n (potencjalnie mogłoby się zdarzyć, począwszy od pewnego czasu $s < n$ zaczęlibyśmy akceptować elementy o rangach i i $i+1$, czyli $s_i = s_{i+1}$).

Zastosowanie algorytmu dla konkretnego n i niewielką ilość różnych progów poniżej n ilustruje przykład dla $n = 10000$.

Przykład. Progi $s_i^{(n)}$ (dla uproszczenia na rysunku oznaczane przez s_i), dla $n = 10000$.



Dla powyższego przykładu mamy następujące wyniki:
$s_1 = 3414$ i $G = G_{s_1} = 0.289237$;
$s_2 = 7508$ i $G_{s_2} = 0.173662$;
$s_3 = 9234$ i $G_{s_3} = 0.066819$;
$s_4 = 9814$ i $G_{s_4} = 0.017944$;
$s_5 = 9964$ i $G_{s_5} = 0.003665$;
$s_6 = 9995$ i $G_{s_6} = 0.000599$;
$s_7 = 10000$ i $G_{s_7} = 0.0001$.

2.8.2 Asymptotyka

W pracy pokazujemy, że istnieją granice (asymptotyki progów) $\lim_{n\to\infty} \frac{s_p^{(n)}}{n}$ dla każdego p naturalnego dodatniego i oznaczamy je przez α_p, odpowiednio, ([H7], Theorem 11).

Jest warte podkreślenia, że asymptotyka prawdopodobieństwa sukcesu zależy wyłącznie od wartości asymptotycznej pierwszego progu. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 ([H7], Theorem 6).

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}[X_{\tau_n} \leq 1/n] = 1 - e^{-\alpha_1}. \tag{2.40}$$

Przedstawimy szkic dowodu tego twierdzenia. Najpierw przypomnijmy, że $\mathbf{P}[X_{\tau_n} \leq 1/n] = G^{(n)}_{s_1^{(n)}}$. Jeśli zmodyfikujemy grę $\mathfrak{G}^{(n)}$, akceptując również najmniejszy element już w chwili $s_1^{(n)}-1$, nie zwiększymy prawdopodobieństwa wygranej. Dlatego,

$$G^{(n)}_{s_1^{(n)}} \geq \frac{1}{s_1^{(n)}-1} \cdot \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s_1^{(n)}-1}\right) + \frac{s_1^{(n)}-2}{s_1^{(n)}-1} \cdot G^{(n)}_{s_1^{(n)}}.$$

Stąd

$$G^{(n)}_{s_1^{(n)}} \geq 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s_1^{(n)}-1}. \tag{2.41}$$

Podobnie, jeśli weźmiemy pod uwagę grę $\mathfrak{G}_{s_1^{(n)}+1}$,

$$\frac{1}{s_1^{(n)}} \cdot \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s_1^{(n)}}\right) + \frac{s_1^{(n)}-1}{s_1^{(n)}} G^{(n)}_{s_1^{(n)}+1} = G^{(n)}_{s_1^{(n)}} \geq G^{(n)}_{s_1^{(n)}+1}.$$

Stąd

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s_1^{(n)}} \geq G^{(n)}_{s_1^{(n)}+1}. \tag{2.42}$$

Jeśli pominiemy jedną możliwość zatrzymania, tracimy zatem nie więcej niż $1/n$ z szansy na wygraną. Zatem

$$0 \leq G^{(n)}_{s_1^{(n)}} - G^{(n)}_{s_1^{(n)}+1} \leq \frac{1}{n},$$

i stąd

$$\lim_{n\to\infty} \left(G^{(n)}_{s_1^{(n)}} - G^{(n)}_{s_1^{(n)}+1}\right) = 0. \tag{2.43}$$

Ze wzorów (2.41), (2.42) oraz (2.43) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}_{s_1^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s_1^{(n)}}\right) = 1-e^{-\alpha_1}.$$

Zależność między α_1 i α_2 opisuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3 ([H7], Theorem 8). *Asymptotyki progów α_1 i α_2 są związane następującym równaniem całkowym*

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{s} e^{-s} ds = e^{-\alpha_2}. \tag{2.44}$$

Analogiczne rozumowanie co w dowodzie twierdzenia 2 prowadzi do następującego twierdzenia opisującego zależność między kolejnymi asymptotykami progów dla $p > 1$.

Twierdzenie 4 ([H7], Theorem 9). *Dla $p > 1$ asymptotyki progów α_p and α_{p+1} są związane następującym równaniem*

$$\frac{e^{-\alpha_p}}{(\alpha_p)^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-2} \frac{(\alpha_p)^k}{k!} = \frac{e^{-\alpha_{p+1}}}{(\alpha_{p+1})^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(\alpha_{p+1})^k}{k!} - \frac{1}{p!} e^{-\alpha_{p+1}}. \tag{2.45}$$

W pracy udowadniamy (jako techniczny lemat; podane w dalej w pracy estymacje są dokładniejsze), że asymptotyka progu α_1 jest większy niż $\frac{1}{4}$, ([H7], Lemma 14) oraz asymptotyka progu α_2 jest większy niż $\frac{1}{2}$, ([H7], Lemma 15).

Następnie pokazujemy, że zachodzi następująca nierówność dla α_p, $p \geq 4$.

Twierdzenie 5 ([H7], Theorem 17). *Dla każdego $p \geq 4$, asymptotygi progów α_p spełniają następującą nierówność $\alpha_p > 1 - \frac{2^p}{(p-1)!}$.*

Następny lemat przedstawia oszacowanie błędu, jeśli zaczniemy od przybliżenia α_{p+1} (z błędem $\Delta\alpha_{p+1}$), aby obliczyć α_p za pomocą równań (2.44) i (2.45).

Lemat ([H7], Lemma 18). *Błąd w przybliżeniu α_p spełnia następujące nierówności*

$$\Delta\alpha_1 \leq 3\Delta\alpha_2$$

oraz

$$\Delta\alpha_p \leq \frac{p!}{p! - 1} \cdot \Delta\alpha_{p+1} \textit{dla każdego } p \geq 2.$$

Z (2.44), mamy

$$F(\alpha_1, \alpha_2) := \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{s} e^{-s}\, ds - e^{-\alpha_2} = 0.$$

Zatem z twierdzenia o funkcji uwikłanej otrzymujemy

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}}{\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}} = \frac{\frac{1}{\alpha_2} e^{-\alpha_2} + e^{-\alpha_2}}{\frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1}}.$$

Mamy $e^{\alpha_1 - \alpha_2} \leq 1$ i $\frac{1}{\alpha_2} < 2$, a zatem z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że

$$\Delta\alpha_1 \leq \left(\max \left| \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \right| \right) \Delta\alpha_2 \leq \left(\max(\alpha_1 e^{\alpha_1 - \alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_2} + 1 \right)) \right) \Delta\alpha_2 \leq 3\Delta\alpha_2,$$

gdzie maksimum jest obliczane względem wszystkich par (α_1, α_2) takich, że $\frac{1}{4} < \alpha_1 < \alpha_2$.

Dla $p \geq 2$, z warunku (2.45), otrzymujemy zależność

$$G(\alpha_p, \alpha_{p+1}) := \frac{e^{-\alpha_p}}{(\alpha_p)^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-2} \frac{(\alpha_p)^k}{k!} - \frac{e^{-\alpha_{p+1}}}{(\alpha_{p+1})^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(\alpha_{p+1})^k}{k!} + \frac{1}{p!} e^{-\alpha_{p+1}} = 0.$$

Wówczas

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_p} = \frac{d\left(\frac{e^{-\alpha_p}}{(\alpha_p)^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-2} \frac{(\alpha_p)^k}{k!}\right)}{d\alpha_p} < 0$$

oraz

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_{p+1}} = \frac{d\left(\frac{-e^{-\alpha_{p+1}}}{(\alpha_{p+1})^{p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(\alpha_{p+1})^k}{k!} + \frac{1}{p!} e^{-\alpha_{p+1}}\right)}{d\alpha_{p+1}} > 0.$$

Obliczając obie pochodne i ograniczając $\frac{\partial G}{\partial \alpha_{p+1}}$ z góry a $\left|\frac{\partial G}{\partial \alpha_p}\right|$ z dołu oraz stosując, jak dla przypadku $p = 1$, twierdzenie o funkcji uwikłanej i twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, otrzymujemy następującą nierówność dla błędów:

$$\Delta\alpha_p \leq \frac{\left|\frac{1-p}{\alpha_{p+1}^{p-1}}\right|}{\left|\frac{1-p}{\alpha_p^{p-1}} e^{-\alpha_p}\left(e^{\alpha_p} - \frac{p+1}{p \cdot p!}\right)\right|} \Delta\alpha_{p+1}$$

(pochodna $\frac{\partial G}{\partial \alpha_p}$ zawiera $p-1$ wyrazów rozwinięcia e^{α_p}). Stąd

$$\Delta\alpha_p \leq \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\alpha_p} \cdot \frac{p+1}{p} \cdot \frac{1}{p!}} \Delta\alpha_{p+1}.$$

Ponieważ $\alpha_p < \alpha_{p+1}$ i $\alpha_p \geq \frac{1}{2}$, otrzymujemy $e^{-\alpha_p} < e^{-\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}$, a stąd $e^{-\alpha_p} \cdot \frac{p+1}{p} < 1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\Delta\alpha_p \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p!}} \Delta\alpha_{p+1}.$$

Z powyższego lematu wnioskujemy, że

$$\Delta\alpha_1 \leq 3 \cdot \prod_{k=2}^{p} \frac{k!}{k! - 1} \cdot \Delta\alpha_{p+1}.$$

Załóżmy, że chcemy wyznaczyć asymptotyczne progi $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ z dziewięcioma cyframi znaczącymi. Wybierzemy $p+1$ tak, że α_{p+1} jest wystarczająco bliskie 1, zamienimy α_{p+1} na 1 i użyjemy formuły rekurencyjnej (2.45) $p-1$ razy i formuły (2.44) jeden raz, aby znaleźć α_1. Potrzebujemy $\Delta\alpha_1 \leq 10^{-9}$, więc musimy sprawdzić dla jakich wartości p nierówność

$$3 \cdot \prod_{k=2}^{p} \frac{k!}{k!-1} \cdot \frac{2^{p+1}}{p!} \leq 10^{-9}$$

jest spełniona. Ta nierówność zachodzi dla $p \geq 18$. Używając Maple™, znajdujemy $\alpha_{18}, \alpha_{17}, \cdots, \alpha_1$ i asymptotyczną wartość gry G. Asymptotyczne progi oraz dla porównania rzeczywiste progi dla $n = 10000$ przedstawiono w następującej tabeli:

p	α_p	$\frac{s_p}{10{,}000}$
1	0.341366903	0.3414
2	0.750740494	0.7508
3	0.923364484	0.9234
4	0.981378241	0.9814
5	0.996360353	0.9964
6	0.999406524	0.9995
7	0.999916776	1
8	0.999989751	1
9	0.999998874	1
10	0.999999888	1

Wartości progów (asymptotyczne i rzeczywiste).

Asymptotyczna wartość gry jest równa

$$\lim_{n\to\infty} E(G_n) = 1 - e^{-\alpha_1} \approx 0.289201933, \quad \text{gdzie wszystkie cyfry są znaczące,}$$

podczas gdy wartość gry dla $n = 10000$ wynosi $E(G_{10{,}000}) \approx 0.289236559$.

Rozdział 3

Inne osiągnięcia

Za istotny wkład w teorię optymalnego zatrzymania uważam pracę napisaną wspólnie z N. Georgiou, M. Morayne i J. Niemcem "On a universal best choice algorithm for partially ordered sets" [P7] (2008). Praca ta dotyczy optymalnego zatrzymania dla wersji problemu sekretarki dla zbiorów częściowo uporządkowanych. Tematyka ta została zapoczątkowana klasyczną już pracą Stadje [27] (1980). J. Preater podał jako pierwszy algorytm najlepszego wyboru w sytuacji, gdy obserwator nie zna a priori rozpatrywanego porządku częściowego a zna jedynie liczbę elementów. Prowdopodobieństwo sukcesu oszacował jako $\geq 1/8$, [20] (1999). W symulacjach komputerowych prawdopodobieństwo to wychodziło $\geq 1/4$. W naszej pracy udowodniliśmy, że algorytm Preatera daje dla każdego częściowego porządku prawdopodobieństwo $\geq 1/4$ i że tego oszacowania dla tego algorytmu poprawić już nie można. Kolejny uniwersalny algorytm dający oszacowanie lepsze niż $1/4$ został podany przez J.Kozika, [12] (2010), a nastepnie Frej i Westlund, [6] (2010), podali algorytm dający prawdopodobieństwo sukcesu $> 1/e$, którego to rezultatu poprawić już asymptotycznie nie można. W ramach tej tematyki powstała też inna praca Garroda i Morrisa, [8] (2013), podająca lepsze oszacowania dla porządków częściowych spełniających dodatkowe założenia. Wszystkie te wymienione prace są często cytowane, a praca [P7] jest moją dotychchzas najczęściej cytowaną pracą.

W moich wcześniejszych pracach, w tym wchodzących w skład doktoratu, zajmowałam się teorią nierówności całkowych rozwijając stworzoną przez A. Rybarskiego i B. Florkiewicza jednolitą metodę otrzymywania różnych typów nierówności całkowych z funkcjami wagowymi zawierających funkcję i jej pochodną. W szczególności uzyskałam nowe wyniki dla klasy nierówności typu Opiala. Omawiam te rezultaty poniżej.

3.1 Inne publikacje

[P1] M. Kuchta. Some quadratic integral inequalities of Opial type. Annales Polonici

Mathematici, 63 (1996), 103-113.

[P2] B. Florkiewicz, M. Kuchta. Some quadratic integral inequalities of first order. Colloquium Mathematicum, 75 (1998), 7-18.

[P3] M. Kuchta, M. Morayne, S. Solecki. A martingale proof of the theorem by Jessen, Marcinkiewicz and Zygmund on strong differentiation of integrals. Seminaire de Probabilites XXXV, Lecture Notes in Mathematics, 1755, Springer-Verlag 2001.

[P4] B. Florkiewicz, M. Kuchta. Integral inequalities associated with inequalities of Opial type. Bulletin of the Polish Academy of Science. Mathematics, 50, (2002), 41-45.

[P5] M. Kuchta, M. Morayne, J. Niemiec. Counting embeddings of a chain into a tree. Discrete Mathematics, 297 (2005), 49-59.

[P6] M. Kuchta, J. Stasiak. Maximal Binary Cliques. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 24 (2006), 237-241.

[P7] N. Georgiou, M. Kuchta, M. Morayne, J. Niemiec. On a universal best choice algorithm for partially ordered sets. Random Structures and Algorithms, 32 (2008), 263-273.

[P8] M. Kuchta, M. Morayne, J. Niemiec. Counting embeddings of a chain into a binary tree. Ars Combinatoria, 91 (2009), 97-111.

Prace [P1], [P2], [P4]

W pracach [P1], [P2], [P4] zastosowana została jednolita metoda otrzymywania różnych typów nierówności całkowych z funkcjami wagowymi zawierających funkcję i jej pochodną. W pracach stosujemy następujące oznaczenia: $I = (\alpha, \beta)$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, H - podklasa funkcji absolutnie ciągłych na I oraz r, s, u - funkcje wagowe zmiennej $t \in I$ spełniające dodatkowe założenia regularności w zależności od rozważanej klasy nierówności.

[P1] zawiera rezultaty z mojej rozprawy doktorskiej. W pracy zostały wyprowadzone i badano nierówności całkowe typu Opiala:

$$\int_I s\,|hh'|\,dt \leq \int_I r(h')^2 dt,$$

gdzie $h \in H$ oraz h spełnia warunek graniczny: $h(\alpha) = 0$ lub $h(\beta) = 0$. W tym przypadku metoda polega na tym, że dla zadanej funkcji wagowej r oraz pomocniczej funkcji φ ustala się drugą funkcję wagową s, a następnie klasę H funkcji absolutnie ciągłych h, dla których zachodzi powyższa nierówność.

W [P2] wyprowadzamy i badamy kwadratowe nierówności całkowe pierwszego rzędu postaci

$$\int_I \left(r(h')^2 + s\,|hh'|\,dt + uh^2 \right) dt \geq 0,$$

gdzie $h \in H$.

W [P4] wyprowadzamy i badamy nierówności całkowe postaci

$$\int_I uh^p\,|h'|\,dt \leq (p+1)^{p/(p+1)} \left(\int_I r\,|h'|^{p+1}\,dt \right)^{1/(p+1)} \left(\int_I sh^p\,|h'|\,dt \right)^{p/(p+1)},$$

gdzie $p > 0$, $h \in H$ oraz h spełnia warunek graniczny: $h(\alpha) = 0$ lub $h(\beta) = 0$.

Praca [P3]

W pracy [P3] przedstawiony został martyngałowy dowód twierdzenia Jessena, Marcinkiewicza i Zygmunda o prawie wszędzie silnej różniczkowalności całki z funkcji klasy $L(\mathrm{Log}^+ L)^{n-1}$ na $\mathbb{R}^n$. Dowód opiera się na twierdzeniu Cairoli o zbieżności martyngałów wieloindeksowych. Wynik ten jest przeniesieniem na przypadek silnej różniczkowalności w $\mathbb{R}^n$ idei dowodu twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu całki z funkcji klasy L_1

opartego na twierdzeniu Dooba o zbieżności martyngałów ([2], [17], [19], [28]).

Praca [P6]

W pracy [P6] badamy klasę maksymalnych pod względem zawierania k-klik binarnych, czyli takich podzbiorów $\mathbb{C}$ hiperkostki $\mathbb{H}_n = \{0,1\}^n$, że dla każdych dwóch różnych $x, y \in \mathbb{C}$, odległość Hamminga między x i y jest równa $d_H(x,y) = k$, gdzie k jest ustaloną stałą dodatnią, (patrz [24]). W pracy podajemy pełną klasyfikację binarnych 2-klik maksymalnych. Mianowicie, pokazujemy, że istnieją dwa rodzaje binarnych 2-klik maksymalnych: tzw. małe i duże (przez SM_n i LM_n oznaczamy odpowiednio zbiory wszystkich takich 2-klik maksymalnych). W pracy zostało pokazane, że dla $n \geq 4$ zbiory SM_n i LM_n są rozłączne. Dla $n \geq 3$ liczba elementów zbioru SM_n wynosi $\binom{n}{3}2^{n-2}$, a dla $n \geq 4$ liczba elementów zbioru LM_n wynosi 2^n (wynika stąd, że moc zbioru wszystkich binarnych 2-klik maksymalnych wynosi $\binom{n}{3}2^{n-2} + 2^n$). Niech $n \geq 4$. Zostało pokazane, że jeśli $x \in \mathbb{H}_n$, to x należy do $n + \binom{n}{3}$ różnych 2-klik maksymalnych: n dużych oraz $\binom{n}{3}$ małych 2-klik maksymalnych oraz jeśli $x, y \in \mathbb{H}_n$ i $\{x, y\}$ jest 2-kliką, to $\{x, y\}$ może być rozszerzona do n różnych 2-klik maksymalnych: dwóch dużych oraz $n-2$ małych. Natomiast jeśli $x, y, z \in \mathbb{H}_n$ i $\{x, y, z\}$ jest 2-kliką, to $\{x, y, z\}$ może być rozszerzona do dwóch różnych 2-klik maksymalnych: jednej dużej i jednej małej.

Prace [P5], [P8]

Niech T będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, którego diagram Hassego jest drzewem ukorzenionym w elemencie największym i $\mathbf{1}_T$ oznacza element największy drzewa T. W [P5] i [P8] dla k naturalnego porównujemy liczbę A_T^k tych łańcuchów o długości k w T, które zawierają $\mathbf{1}_T$ i liczbę B_T^k tych łańcuchów, które nie zawierają $\mathbf{1}_T$. W [P5] rozważane są dowolne drzewa, natomiast w [P8] drzewa binarne.

W pracy [P5] dla danej liczby naturalnej k ustalamy próg na średnią głębokość drzewa T, powyżej której jest zawsze więcej łańcuchów drugiego rodzaju niż pierwszego. Mianowicie, niech $AD(T) = \frac{\sum_{i=1}^{k} dp(l_i)}{k}$ oznacza średnią głębokość drzewa T, gdzie $l_1, ..., l_k$ oznaczają liście, czyli wierzchołki stopnia 1 w drzewie T oraz $dp(l_i)$ - głębokość liścia l_i, $i = 1, \ldots, k$. Wówczas, jeśli $AD(T) \geq 2k$, to $B_T^k \geq A_T^k$, gdzie $k \geq 2$. Ponadto, jeśli drzewo T nie składa się wyłącznie z rozłącznych łańcuchów, każdy o długości $2k$, to $B_T^k > A_T^k$. W pracy [P5] podajemy również dokładniejsze oszacowanie tej zależności. Dowodzimy, że jeśli $AD(T) \geq 2k$ oraz drzewo T ma s liści o głębokości $2k$ i co najmniej jeden liść o głębokości większej niż $2k$, gdzie $k \geq 3$, to zachodzi następująca nierówność: $A_T^k / \left(A_T^k + B_T^k\right) \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{2k+1}{k(s+2)+s+1} \frac{k-1}{10k^2+k-3}$.

W pracy [P8] pokazujemy, że dla danej liczby naturalnej k, jeśli głębokość drzewa binarnego T jest większa lub równa $2k + [k \ln k]$, to $B_T^k > A_T^k$.

Problem zliczania tzw. "dobrych" i "złych" (dobrych - zawierających element maksymalny, złych - niezawierających elementu maksymalnego) zanurzeń porządkowych poddrzew w większe drzewo pojawia się przy poszukiwaniu optymalnych algorytmów najlepszego wyboru na zbiorach częściowo uporządkowanych oraz badaniu niektórych właściwości takich algorytmów.

Praca [P7]

W pracy [P7] zostało poprawione oszacowanie prawdopodobieństwa sukcesu uniwersalnego algorytmu najlepszego wyboru dla zbioru częściowo uporządkowanego o znanej liczbie elementów i nieznanym porządku, który został zaproponowany przez J. Preatera ([20]). Poprawione zostało dolne oszacowanie prawdopodobieństwa sukcesu ze stałej $1/8$ do stałej $1/4$. Pokazane zostało również, że wynik ten jest najlepszy z możliwych dla tego algorytmu, tj. ograniczenia $1/4$ nie można zwiększyć.

Bibliografia

[1] F.S. Benevides, M. Sulkowska. Percolation and best choice problem for powers of paths. Journal of Applied Probability, 54, no. 2 (2017), 343-362.

[2] S.D. Chatterji. Les martingales et leurs applications analytiques. Lecture Notes in Mathematics, 307 (1973), 27-164.

[3] Y.S. Chow, S. Moriguti, H. Robins, S.M. Samuels. Optimal selection based on relative rank: The "Secretary problem", Israel J. Math. 2 (1964) 81-90.

[4] Y.S. Chow, H. Robbins, D. Siegmund. Great expectations: the theory of optimal stopping. Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., 1971.

[5] P.R. Freeman. The secretary problem and its extensions: A review. International Statistical Review, 51(2) (1983), 189-206.

[6] R. Freij, J. Wästlund. Partially ordered secretaries. Electronic Communications in Probability, 115 (2010), 504-507.

[7] B. Garrod, G. Kubicki and M. Morayne. How to choose the best twins. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 26 (2012), 384-398.

[8] B. Garrod, R. Morris. The secretary problem on an unknown poset. Random Structures Algorithms, 43 (2013), 429-451.

[9] N. Georgiou. Embeddings and other mappings of rooted trees into complete trees. Order, 22 (2005), 257–288.

[10] B. Gittenberger, Z. Gołębiewski, I. Larcher, M. Sulkowska. Counting embeddings of rooted trees into families of rooted trees. The Electronic Journal of Combinatorics, 29 (2022), 1-34.

[11] S.M. Gusein-Zade. The problem of choice and the optimal stopping rule for a sequence of independent trials. Teoria Verojatnosti i Primenenia, 11 (1966), 534-537.

[12] J. Kozik. Dynamic threshold strategy for universal best choice problem. DMTCS Proceedings, 21st International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods in the Analysis of Algorithms, (2010), 439-451.

[13] G. Kubicki, J. Lehel, M. Morayne. A ratio inequality for binary trees and the best secretary. Combinatorics, Probability and Computing, 11 (2002), 149-161.

[14] G. Kubicki, M. Morayne. Graph-theoretic generalization of the secretary problem: the directed path case. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 19, no. 3 (2005), 622-632.

[15] A. Kurpisz and M. Morayne. Inform friends, do not inform enemies, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 31 (3) (2014), 435-440.

[16] D.V. Lindley. Dynamic programming and decision theory. Applied Statistics, 10 (1961), 39-51.

[17] B. Maisonneuve. Surmartingales-mesures. Lecture Notes in Mathematics, 850 (1981), 347-350.

[18] M. Morayne, Partial-order analogue of the secretary problem; the binary tree case. Discrete Mathematics, 184 (1998), 165-181.

[19] M. Morayne, S. Solecki. Martingale proof of the existence of Lebesgue points. Real Analysis Exchange, 15 (1989-1990), 401-406.

[20] J. Preater. The best-choice problem for partially ordered objects. Operations Research Letters, 25 (1999), 187–190.

[21] M. Przykucki. Optimal stopping in a search for a vertex with full degree in a random graph. Discrete Applied Mathematics, 160 (2012), 339-343.

[22] S.M. Samuels. Exact solutions for the full information best choice problem. Technical Report #82-17, Departament of Statistics, Purdue University, (1982).

[23] S.M. Samuels. Secretary problems. In Handbook of Sequential Analysis, eds B. K. Ghosh and P. K. Sen, Marcel Dekker, 381-405, New York, 1991.

[24] N.J.A. Sloane. Unsolved Problems in Graph Theory Arising from the StudyCodes. Graph Theory Notes of New York, 18(1989), 11-20.

[25] M.H. Smith. A secretary problem with uncertain employment. Journal of Applied Probability, 12 (1975) 620-624.

[26] F. Spitzer. Principles of Random Walk, Springer-Verlag, 2001.

[27] W. Stadje, Efficient stopping of a random series of partially ordered points, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 177 (1980), 430-447.

[28] K.S. Stromberg. Probability for Analysts. Chapman and Hall, New York, 1994.

[29] M. Tamaki. Secretary problem with uncertain employment when backwards solicitation is permitted. Mathematica Japonica 24 (1979/80) 439-450.

[30] M.C.K. Yang. Recognizing the maximum of a random sequence based on relative rank with backwards solicitation. Journal of Applied Probability, 11 (1974) 504-512.