Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Jerzy Legut

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne:

- Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, Politechnika Wrocławska, 1984 (czerwiec) Temat rozprawy doktorskiej: *Gry sprawiedliwego podziału.*
  Promotor: prof. dr hab. Rastislav Telgarsky
- Magister inżynier matematyki, specjalność: matematyka stosowana, Politechnika Wrocławska, 1981 (lipiec), dyplom z wyróżnieniem. Temat pracy magisterskiej: *Gry sprawiedliwego podziału i twierdzenie Lapunowa.*
  Promotor: prof. dr hab. Rastislav Telgarsky

3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych.

- Politechnika Wrocławska, Wydział Matematyki,
  - 2017 - adiunkt
  - 2016-2017 starszy wykładowca
- Politechnika Wrocławska, Wydział Podstawowych Problemów Techniki,
  - 1987-1994 adiunkt
  - 1984-1987 wykładowca
  - 1981-1984 asystent

Spis treści dalszej części autoreferatu

4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.)

4.1. Lista publikacji składających się na osiągnięcie naukowe

Do przedstawienia swojego osiągnięcia naukowego wybrałem następujące publikacje:

[H1] Legut, J.: *Inequalities for α-optimal partitioning of a measurable space.* Proc. Amer. Math. Soc., 104, 1249-1251 (1988)

[H2] Legut, J. and Wilczyński, M.: *Optimal partitioning of a measurable space.* Proc. Amer. Math. Soc. 104, 262-264 (1988)

[H3] Legut J. and Wilczyński M.: *How to obtain a range of a nonatomic vector measure in* $\mathbb{R}^2$, J. Math. Anal. Appl. 394, 102-111 (2012)

[H4] Legut J.: *Connecting two points in the range of a vector measure*, Colloquium Mathematicum, vol. 153, No. 2, 163-167 (2018)

[H5] Legut J.: *How to obtain an equitable optimal fair division* Ann. Oper. Res. 284, 323-332 (2020)

[H6] Legut J.: *Simple fair division of a square*, J. Math. Econom., 86, 35-40, (2020)

Wszystkie powyższe artykuły zostały opublikowane w czasopismach znajdujących się na liście filadelfijskiej (Journal Citation Reports). Według obecnego systemu punktacji (wykaz MEiN z dnia 21 grudnia 2021) czasopismo, w którym opublikowano dwie pierwsze prace [H1] i [H2] oceniane jest na 100 pkt. Pozostałe prace zostały opublikowane w czasopismach ocenianych na 70 punktów.

4.2. Informacje wstępne

Niniejszy wniosek dotyczy przeprowadzenia drugiego postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego. Pierwszy wniosek złożyłem w kwietniu 2019 roku do Centralnej Komisji do Spraw Stopni i Tytułów. Niestety przeprowadzone postępowanie zostało zakończone decyzją odmowną Komisji ds. Stopni Naukowych w Dyscyplinie Matematyka Politechniki Wrocławskiej nadania mi tytułu doktora habilitowanego (Uchwała 3/2/2020 z dn. 3 marca 2020).

W pierwszym wniosku jako osiągnięcie naukowe wybrałem 7 publikacji, z których trzy [H3], [H4] i [H5] pozostawiłem w niniejszym wniosku. Kierując się sugestiami recenzentów z pierwszego postępowania włączyłem do wniosku starsze publikacje [H1] i [H2]. Praca [H6] została opublikowana już po rozpoczęciu pierwszego postępowania habilitacyjnego i dlatego nie była ona w nim uwzględniona.

Prowadzone przeze mnie badania naukowe dotyczą następujących obszarów:

- wykorzystanie teorii gier do rozwiązywania problemów sprawiedliwego podziału,

- zastosowania wyników teorii sprawiedliwego podziału w ekonomii matematycznej,
- badanie własności obrazu bezatomowej miary wektorowej oraz ich wykorzystanie w teorii sprawiedliwego podziału,
- metody optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej i ich zastosowania w teorii sprawiedliwego podziału oraz teorii decyzji.

Główne wyniki dwóch pierwszych obszarów mojej działalności naukowej uzyskano w latach 1984-1994. Większość tych wyników opublikowano w artykułach będących w bazie czasopism JCR (Journal Citation Reports). Niektóre z nich były prezentowane na dwóch międzynarodowych konferencjach poświęconych teorii gier w USA (1988, 1991). Byłem również zapraszany przez różne uniwersytety (z USA, Izraela i Holandii) do wygłaszania wykładów na temat moich wyników uzyskanych w tamtym czasie. Nawiązałem także współpracę z matematykami z Holandii specjalizującymi się w teorii gier, w wyniku której zostały napisane i opublikowane dwa wspólne artykuły ([39, 40]).

Po dwudziestu latach przerwy w moich badaniach naukowych wróciłem do pracy nad problemami sprawiedliwego podziału. Skoncentrowałem się na badaniach, których tematyka została ujęta w dwóch ostatnich wyżej wymienionych obszarach.

4.3. Omówienie najważniejszych wyników uzyskanych w publikacjach składających się na osiągnięcie naukowe

4.3.1. Problem sprawiedliwego podziału

Przypuśćmy, że pewien obiekt np. tort ma być podzielony pomiędzy n osób (graczy), w taki sposób, aby każdy z nich otrzymał kawałek, który według jego własnej oceny stanowi przynajmniej $1/n$ wartości całego tortu. Taki podział nazywamy podziałem sprawiedliwym. Prostym i dobrze znanym sposobem sprawiedliwego podziału tortu pomiędzy dwie osoby jest metoda "jeden dzieli, drugi wybiera". Na początku tej procedury gracze ustalają np. poprzez losowanie, który z nich będzie kroił tort, a który będzie wybierał jeden spośród powstałych dwóch kawałków. Każdy z graczy może mieć inne zdanie co do tego, które kawałki tortu są dla niego najcenniejsze. Dlatego osoba, która dokonuje wyboru kawałka tortu ma szansę uzyskać według jego własnej oceny więcej niż $1/2$ wartości całego tortu. Po raz pierwszy problem sprawiedliwego podziału został sformułowany i opisany w 1949 roku przez Steinhausa [57]. Postawił on pytanie, czy reguła "jeden dzieli, drugi wybiera" może być rozszerzona dla $n > 2$. Sam znalazł rozwiązanie dla $n = 3$, a następnie Banach i Knaster (por. [31, 56, 57, 58]) pokazali, że rozwiązanie dla $n = 2$ może być uogólnione na dowolną liczbę graczy. Ich wynik został później zmodyfikowany przez Dubinsa i Spaniera [23]. Z kolei Fink [27] podał algorytm, w którym liczba graczy nie musi być znana. Brams i Taylor [7] odkryli ciekawą metodę uzyskania partycji wolnej od zazdrości, w której żaden z graczy nie jest zainteresowany żadnym kawałkiem tortu przydzielonemu innemu graczowi.

Dubins i Spanier [23] sformułowali następujący model matematyczny problemu sprawiedliwego podziału. Niech $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$, $(n > 1)$, będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$. Przestrzeń ta reprezentuje obiekt (tort), który ma być podzielony pomiędzy graczy, a miary $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ opisują indywidualne oceny zbiorów należących do $\mathcal{B}$.

Uporządkowaną partycją (podziałem) $P = \{A_i\}_{i=1}^n$ przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$ nazywamy zestaw parami rozłącznych zbiorów $A_1, \ldots, A_n$, których suma jest równa $\mathcal{X}$. Oznaczmy przez $\mathscr{P}_n$ zbiór wszystkich mierzalnych partycji $P = \{A_i\}_{i=1}^n$ zbioru $\mathcal{X}$. Niech $I = \{1, ..., n\}$ oznacza zbiór wszystkich graczy. W literaturze teorii sprawiedliwego podziału rozważane są różne kryteria sprawiedliwości.

Definicja 4.1. Podział $P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n$ nazywamy:

- *proporcjonalnym* (proportional), jeśli $\mu_i(A_i) \geqslant 1/n$ dla każdego $i \in I$,
- *wolnym od zazdrości* (envy-free), jeśli $\mu_i(A_i) \geqslant \mu_i(A_j)$ dla każdego $i, j \in I$,
- *dokładnie sprawiedliwym* (exact), jeśli $\mu_i(A_j) = 1/n$ dla każdego $i, j \in I$,
- *równomiernym* (equitable), jeśli $\mu_i(A_i) = \mu_j(A_j)$ dla każdego $i, j \in I$.

Problem sprawiedliwego podziału jest rozważany w wielu wariantach uwzględniających różne kryteria sprawiedliwości oraz rodzaje obiektów, które mają być podzielone. Analizowane są różne preferencje graczy oraz kryteria oceniające jakość podziałów. W literaturze dotyczącej teorii sprawiedliwego podziału dominują następujące dwa podejścia:

- dowodzenie istnienia partycji obiektu $\mathcal{X}$ spełniającej ustalone kryteria (np. Dubins i Spanier [23], Legut i Wilczyński [H2], [38], Sagara [48, 49], Weller [61]),
- szukanie procedur lub algorytmów uzyskiwania sprawiedliwych podziałów oraz zastosowanie ich w praktyce (np. Brams i Taylor [7, 8], Brams, Taylor i Zwicker [9, 10], Woodall [62]).

W dowodzeniu istnienia podziałów sprawiedliwych często wykorzystuje się słynne twierdzenie Lapunowa [43] o własnościach obrazu bezatomowej miary wektorowej:

Twierdzenie 4.2. *Jeśli $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ są skończonymi miarami bezatomowymi zdefiniowanymi na przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$, to zbiór $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ jest wypukły i zwarty w $\mathbb{R}^n$, gdzie odwzorowanie $\vec{\mu} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ zdefiniowane jest następująco:*

$$\vec{\mu}(A) = (\mu_1(A), \ldots, \mu_n(A)), A \in \mathcal{B}.$$

Zbiór $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ będziemy nazywać w dalszej części autoreferatu zbiorem Lapunowa.

Wykorzystując powyższe twierdzenie można łatwo pokazać przez indukcję, że istnieje podział dokładnie sprawiedliwy (por. [37]).

Legut [32, 34] analizował problem sprawiedliwego podziału tortu dla nieskończonej i przeliczalnej liczby graczy, a także zaproponował model sprawiedliwego podziału, w którym uczestniczy nieprzeliczalna liczba graczy. Wyniki uzyskane w teorii sprawiedliwego podziału znajdują szerokie zastosowanie w ekonomii, między innymi w modelowaniu wymiany i alokacji różnorodnych towarów (por. [33, 39, 44, 50]).

4.3.2. Podział α-optymalny przestrzeni mierzalnej [H1,H2]

Niech $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$. Dubins i Spanier [23] pokazali, że jeśli przynajmniej dwie miary są różne, to istnieje podział proporcjonalny, dla którego każdy z graczy może uzyskać więcej niż $1/n$ wartości całego tortu $\mathcal{X}$. W teorii sprawiedliwego podziału analizuje się partycje, które maksymalizują indywidualne miary zbiorów przydzielanych poszczególnym graczom. Elton, Hill i Kertz [26] zdefiniowali *optymalną wartość* v^* sprawiedliwego podziału w następujący sposób

$$v^* := \sup_{P \in \mathscr{P}_n} \min_{i \in I} \mu_i(A_i), \tag{4.1}$$

a następnie podali jej oszacowanie

$$(n + M - 1)^{-1} \leqslant v^* \leqslant M n^{-1}, \tag{4.2}$$

gdzie

$$M := \sup_{P \in \mathscr{P}_n} \sum_{i=1}^n \mu_i(A_i).$$

Dubins i Spanier [23] rozszerzyli definicję podziału proporcjonalnego dla przypadku, w którym gracze mogą mieć różne udziały w podziale tortu $\mathcal{X}$. Niech

$$S_n := \{s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n, s_i > 0,\, i \in I,\, \sum_{i=1}^n s_i = 1\},$$

będzie $(n-1)$-wymiarowym otwartym sympleksem oraz niech $\overline{S}_n$ oznacza jego domknięcie w $\mathbb{R}^n$. Współrzędna α_i, $i \in I$, wektora $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_n$ reprezentuje udział i-tego gracza w podziale tortu. Dubins i Spanier [23] pokazali, że dla dowolnego $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_n$ w przypadku, gdy przynajmniej dwie miary są różne, istnieje taki podział $P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n$, dla którego

$$\mu_i(A_i) > \alpha_i \quad \text{dla każdego} \quad i \in I.$$

Zainspirowany wynikiem Dubinsa i Spaniera [23] w pracy [H1] wprowadziłem do problematyki sprawiedliwego podziału definicję podziału $\alpha-$optymalnego.

Definicja 4.3. Partycję $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n$ nazywamy *α-optymalną*, jeśli spełnia następującą równość:

$$v^\alpha := \min_{i \in I} \left[\frac{\mu_i(A_i^*)}{\alpha_i}\right] = \sup_{P \in \mathscr{P}_n} \min_{i \in I} \left[\frac{\mu_i(A_i)}{\alpha_i}\right]. \tag{4.3}$$

Liczbę v^α nazywamy *α-optymalną wartością* problemu podziału przestrzeni mierzalnej. Jest to największa możliwa wartość wyrażenia $\min_{i \in I} \left[\frac{\mu_i(A_i)}{\alpha_i}\right]$, która może być osiągnięta dla miary wektorowej $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ przy podziale obiektu $\mathcal{X}$ dla ustalonego wektora $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_n$.

Definicja 4.4. Partycję $P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n$ nazywamy *równomiernie optymalną* (lub krótko *optymalną*), jeśli jest α-optymalna dla $\alpha = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in S_n$.

Łatwo zauważyć, że $v^* = v^\alpha/n$ dla $\alpha = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in S_n$, gdzie v^* jest zdefiniowane przez (4.1).

Istnienie α-optymalnych podziałów wynika z następującego twierdzenia Dvoretzky'ego, Walda i Wolfowitza [25]:

Twierdzenie 4.5. *Jeśli $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ są skończonymi miarami bezatomowymi zdefiniowanymi na przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$, to zbiór $\vec{\mu}_P(\mathscr{P}_n)$ jest wypukły i zwarty w $\mathbb{R}^n$, gdzie odwzorowanie $\vec{\mu}_P : \mathscr{P}_n \to \mathbb{R}^n$ zdefiniowane jest następująco:*

$$\vec{\mu}_P(P) = (\mu_1(A_1), \ldots, \mu_n(A_n)), P = \{A_i\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n.$$

Z Twierdzenia 4.5 wynika również, że istnieje partycja $P^0 = \left\{A_i^0\right\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n$ spełniająca równość:

$$M = \sup_{P \in \mathscr{P}_n} \sum_{i=1}^n \mu_i(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i(A_i^0).$$

Liczba M może być interpretowana jako "kooperacyjna" wartość problemu sprawiedliwego podziału (por. [33]).

Niech $r_i := \mu_i(A_i^0)$ oraz

$$m := \min\{r_i[r_i - \alpha_i(M-1)]^{-1} : [r_i - \alpha_i(M-1)]^{-1} > 0, \, i \in I\}.$$

W pracy [H1] opublikowałem krótki i elementarny dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.6.

$$m \leqslant v^\alpha \leqslant M. \tag{4.4}$$

Nierówności (4.4) są nie tylko uogólnieniem nierówności (4.2) dla podziałów α-optymalnych, ale także mogą dawać w pewnych przypadkach lepsze oszacowanie optymalnej wartości v^* zdefiniowanej przez (4.1). Przykład takiego oszacowania został podany w pracy [H1]. Oryginalny dowód nierówności (4.2) podany przez Eltona, Hilla i Kertza [26] jest długi i skomplikowany. Wykorzystuje on zaawansowane metody znane z teorii miary. Ze względu na prostotę dowodu nierówności (4.4) podanego w pracy [H1] pozwolę sobie go tutaj zaprezentować.

Dowód Twierdzenia 4.6

Pokażemy najpierw nierówność $v^\alpha \leqslant M$. Przypuśćmy, że $v^\alpha > M$. Z definicji (4.3) liczby v^α wynika, że $\alpha_i^{-1}\mu_i(A_i^*) > M$ dla każdego $i \in I$. Stąd otrzymujemy nierówność $\sum\limits_{i=1}^n \mu_i(A_i^*) > M$, która jest sprzeczna z definicją liczby M.

Aby pokazać drugą nierówność $m \leqslant v^\alpha$ oznaczmy przez $\mathbf{e}_i := (0, ..., 1, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ wektory posiadające wszystkie współrzędne równe zero, z wyjątkiem i-tej współrzędnej, na której występuje liczba 1. Łatwo zauważyć, że $\mathbf{e}_i \in \vec{\mu}(\mathscr{P}_n)$ dla każdego $i \in I$. Niech W oznacza uwypuklenie zbioru $\{\mathbf{r}, \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n\}$, gdzie $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$. Z Twierdzenia 4.5

wynika, że $W \subset \vec{\mu}(\mathscr{P}_n)$. Teraz wystarczy znaleźć liczbę $t^* := \max\{t \in \mathbb{R} : t\alpha \in W\}$. Rozwiązując następujący układ $n+1$ równań liniowych

$$\begin{cases} \beta_i + \beta_{n+1} r_i = \alpha_i, \quad i \in I, \\ \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 1 \end{cases}$$

względem zmiennych $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, ..., n+1$, otrzymujemy $t^* = m$, co kończy dowód.

□

Opisana wyżej metoda wykorzystująca własności geometryczne zbioru $\vec{\mu}(\mathscr{P}_n)$ została później wykorzystana w wielu publikacjach dotyczących oszacowania optymalnych wartości związanych z różnymi podziałami przestrzeni mierzalnej (por. [1, 2, 16, 17, 20, 21]).

Interesującym zagadnieniem jest opisanie konstrukcji podziałów $\alpha-$optymalnych dla miar bezatomowych. Wspólnie z Maciejem Wilczyńskim w pracy [H2] przedstawiliśmy ogólną postać takich podziałów.

Można założyć, że wszystkie bezatomowe miary $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ są absolutnie ciągłe względem tej samej miary ϑ (np. $\vartheta = \sum_{i=1}^n \mu_i$). Oznaczmy przez $f_i = d\mu_i/d\vartheta$ pochodne Radona-Nikodyma, tzn. funkcje f_i, które spełniają następujące równości:

$$\mu_i(A) = \int_A f_i \, d\vartheta, \; A \in \mathcal{B}, \; i \in I. \tag{4.5}$$

Zdefiniujmy następujące zbiory mierzalne:

$$B_i(p) = \bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} \left\{x \in \mathcal{X} : p_i \alpha_i^{-1} f_i(x) > p_j \alpha_j^{-1} f_j(x)\right\},$$

$$C_i(p) = \bigcap_{j=1}^{n} \left\{x \in \mathcal{X} : p_i \alpha_i^{-1} f_i(x) \geqslant p_j \alpha_j^{-1} f_j(x)\right\},$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_n$, $p = (p_1, ..., p_n) \in \overline{S}_n$ oraz $i \in I$.

Legut i Wilczyński [H2] udowodnili następujące:

Twierdzenie 4.7. *Dla dowolnego $\alpha \in S_n$ istnieje $p^* \in \overline{S}_n$ oraz α-optymalna partycja $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n$ spełniająca następujące warunki:*
(i) $B_i(p^*) \subset A_i^* \subset C_i(p^*)$,
(ii) $v^\alpha = \dfrac{\mu_1(A_1^*)}{\alpha_1} = \dfrac{\mu_2(A_2^*)}{\alpha_2} = \ldots = \dfrac{\mu_n(A_n^*)}{\alpha_n}$.
Co więcej, dowolna partycja $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^n$, która spełnia warunki (i) oraz (ii) jest α-optymalna.

Dowód tego twierdzenia oparty jest na minimaksowym twierdzeniu Siona (por [4]).

Legut i Wilczyński [38] badali również istnienie oraz konstrukcję podziałów $\alpha-$optymalnych w przypadku przeliczalnej i nieskończonej liczby graczy. Oznaczmy przez $N := \{1, 2, ...\}$ zbiór graczy oraz niech $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ będą bezatomowymi miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na przestrzeni mierzalnej $\{\mathcal{X}, \mathcal{B}\}$ opisującymi indywidualne oceny zbiorów mierzalnych. Niech $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ będzie nieskończonym ciągiem dodatnich liczb spełniających warunek $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$. Oznaczmy przez $\mathscr{P}_\infty$ zbiór wszystkich mierzalnych partycji $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ przestrzeni $\mathcal{X}$. Legut [32] pokazał, że dla dowolnego ciągu dodatnich liczb $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ sumujących się do 1 oraz dowolnych bezatomowych miar probabilistycznych $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ istnieje podział $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathscr{P}_\infty$ spełniający warunki:

$$\mu_i(A_i) = \alpha_i, \quad i \in N.$$

Legut i Wilczyński [38] pokazali, że teza Twierdzenia 4.7 jest również prawdziwa, jeśli zostanie sformułowana analogicznie dla przypadku nieskończonej przeliczalnej liczby graczy.

Problem $\alpha-$optymalnego podziału był opisywany i badany w wielu publikacjach (por. [16, 17, 20, 21, 48, 49]).

Konstrukcja podziałów $\alpha-$optymalnych dla $\alpha = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n) \in S_n$ pokazana w Twierdzeniu 4.7 może być wykorzystana w następującym problemie klasyfikacji (por. [28, 29, 30]). Przypuśćmy, że ciągła zmienna losowa X ma jeden ze znanych rozkładów opisanych funkcjami gęstości $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $i \in I$, nie wiemy jednak, która z tych gęstości opisuje prawdziwy rozkład tej zmiennej. Rozpatrujemy problem klasyfikacji (por. [28]), w którym na podstawie jednej obserwacji $X(\omega)$ (realizacji zmiennej losowej X) mamy zdecydować, jaki jest jej prawdziwy rozkład.

Definicja 4.8. Partycję $P = \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{P}_n$ utożsamiamy z następującą *regułą decyzyjną*: jeśli $X(\omega) \in A_i$, to do opisu rozkładu X wybieramy funkcję gęstości f_i.

Ważnym celem w problematyce klasyfikacji jest znalezienie reguły decyzyjnej $P = \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{P}_n$, która minimalizuje prawdopodobieństwo błędnej klasyfikacji:

$$\max_{i \in I} \mathbb{P}(X \notin A_i |\, \mathrm{dist}X = f_i).$$

Definiujemy minimalne ryzyko błędnej klasyfikacji następująco:

$$R = \inf \left\{ \max_{i \in I} \mathbb{P}(X \notin A_i |\, \mathrm{dist}X = f_i) : \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{P}_n \right\}.$$

Otrzymujemy:

$$R = \inf \left\{ \max_{i \in I} (1 - \mu_i(A_i)) : \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{P}_n \right\} = 1 - \sup \left\{ \min_{i \in I} \mu_i(A_i) : \{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{P}_n \right\}.$$

W powyższych wyrażeniach zapis $''\mathrm{dist}X = f_i''$ oznacza, że rozkład zmiennej losowej X opisany jest przez funkcję gęstości f_i.

Definicja 4.9. Partycję $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{P}_n$ nazywamy minimaksową regułą decyzyjną, gdy

$$R = 1 - \min_{i \in I} \mu_i(A_i^*).$$

Łatwo zauważyć, że minimaksowa reguła decyzyjna $P^* = \{A_i^*\}_{i=1}^{n} \in \mathscr{P}_n$ jest jednocześnie równomiernym optymalnym podziałem w sensie Definicji 4.4. Jóźwiak i Legut [30] wykorzystując Twierdzenie 4.7 przedstawili przykład konstrukcji reguły decyzyjnej w przypadku dwuwymiarowych zmiennych losowych.

4.3.3. Konstrukcja zbioru Lapunowa w $\mathbb{R}^2$ i jej zastosowanie w $\alpha-$optymalnym podziale [H3]

W tym rozdziale przedstawimy metodę wyznaczania $\alpha-$optymalnej wartości v^α oraz α-optymalnej partycji przestrzeni mierzalnej $\{(0,1), \mathcal{B}\}$ dla dwóch graczy. Tutaj $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę podzbiorów mierzalnych odcinka $(0,1)$. Legut i Wilczyński [H3] zauważyli, że zbiór Lapunowa $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ może być wyznaczony przez pewną ciągłą i niemalejącą funkcję $G : [0,1] \to [0,1]$ w następujący sposób:

$$\vec{\mu}(\mathcal{B}) = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 : 1 - G(1-x) \leqslant y \leqslant G(x)\right\}. \tag{4.6}$$

Pokażemy, jak wyznaczyć tą funkcję. Niech f_1 i f_2 będą funkcjami gęstości zdefiniowanymi na przedziale $(0,1)$ z odpowiadającymi im odpowiednio miarami μ_1, μ_2. Definiujemy następujące funkcje:

$$F_i(x) = \int_0^x f_i(t)\,dt, \quad i = 1,2. \tag{4.7}$$

Z własności zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ wynika, że dla dowolnego $t \in [0,1]$ istnieje zbiór $D(t) \in \mathcal{B}$ taki, że

$$\mu_2(D(t)) = \max\{\mu_2(A) : \mu_1(A) = t,\ A \in \mathcal{B}\}. \tag{4.8}$$

Niech $\mathbb{I}_A$ oznacza funkcję, która jest indykatorem zbioru $A \in \mathcal{B}$. Niech

$$r(x) := \left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right) \mathbb{I}_{\{f_1(x)>0\}}, \quad x \in (0,1). \tag{4.9}$$

Legut and Wilczyński [H4] przyjmując pewne założenia skorzystali z lematu Neymana-Pearsona (por. [42]) do przedstawienia metod wykorzystujących własności funkcji $r(x)$ do wyznaczania funkcji G opisującej brzeg zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{B})$. Te metody zostały opisane w poniższej własności.

Własność 4.10. *Niech* $\{x : f_2(x) > 0\} \subset \{x : f_1(x) > 0\} = (0,1)$. *Wtedy:*

1. *Jeśli funkcja $r(x)$ jest malejąca na $(0,1)$, to*
   $D(x) = \left(0, F_1^{-1}(x)\right)$ *i stąd* $G(x) = F_2(F_1^{-1}(x))$.
2. *Jeśli funkcja $r(x)$ jest rosnąca na $(0,1)$, to*
   $D(x) = \left(F_1^{-1}(1-x), 1\right)$ *i stąd* $G(x) = 1 - F_2(F_1^{-1}(1-x))$.
3. *Jeśli funkcja $r(x)$ jest symetryczna względem $x_0 = 1/2$ i jest malejąca na $(0,1/2)$, to*
   $D(x) = \left(0, F_1^{-1}(x/2)\right) \cup \left(F_1^{-1}(1-x/2), 1\right)$
   i stąd $G(x) = F_2\left(F_1^{-1}(x/2)\right) + 1 - F_2\left(F_1^{-1}(1-x/2)\right)$.
4. *Jeśli funkcja $r(x)$ jest symetryczna względem $x_0 = 1/2$ i jest rosnąca na $(0,1/2)$, to*
   $D(x) = \left(F_1^{-1}\left(\frac{1-x}{2}\right), F_1^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right)$ *i stąd* $G(x) = F_2\left(F_1^{-1}(\frac{1+x}{2})\right) - F_2\left(F_1^{-1}(\frac{1-x}{2})\right)$.

Następujący przykład przedstawia konstrukcję funkcji G przy wykorzystaniu Własności 4.10

Przykład 4.11. Niech f_1 będzie gęstością rozkładu jednostajnego na odcinku $(0,1)$ oraz f_2 będzie unormowaną gęstością rozkładu Cauchy'ego ograniczoną do odcinka $(0,1)$:

$$f_1(x) \equiv 1 \quad \text{i} \quad f_2(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{1 + \left[\frac{\pi}{2}(x - \frac{1}{2})\right]^2}, \qquad x \in (0,1).$$

Odpowiadające tym gęstościom funkcje F_1 i F_2 zdefiniowane przez (4.7) mają postać:

$$F_1(x) = x \quad \text{i} \quad F_2(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}, \qquad x \in [0,1].$$

Ponieważ funkcja $r(x)$ jest symetryczna względem prostej $x_0 = 1/2$ oraz jest rosnąca na przedziale $(0, 1/2)$, to z Własności 4.10 wynika, że funkcja G ma postać:

$$G(x) = F_2\left(F_1^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right) - F_2\left(F_1^{-1}\left(\frac{1-x}{2}\right)\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{4}x\right), \qquad x \in [0,1].$$

□

Legut i Wilczyński [H4] znaleźli również metodę wyznaczania funkcji G w przypadku ogólniejszych funkcji gęstości f_1, f_2. Zdefiniujmy zbiór:

$$\mathscr{R}(f_1, f_2) := \left\{\left(\int_A f_1\,dt, \int_A f_2\,dt\right) \;:\; A \in \mathcal{B}\right\}.$$

Łatwo zauważyć, że $\mathscr{R}(f_1, f_2) = \vec{\mu}(\mathcal{B})$. Zdefiniujmy funkcję $\overline{H} : \mathbb{R} \to [0,1]$ w następujący sposób:

$$\overline{H}(y) := \mu_1(\{x \;:\; f_2(x) > y f_1(x)\}) = \int\limits_{\{x\,:\,f_2(x) > y f_1(x)\}} f_1(x)\,dx. \tag{4.10}$$

Zdefiniujmy teraz funkcję $f_2^*(x)$:

$$f_2^*(x) := \overline{H}^{\,-1}(x) \quad \text{dla każdego} \quad x \in (0,1), \tag{4.11}$$

gdzie

$$\overline{H}^{\,-1}(x) = \inf\{y \geqslant 0 \;:\; \overline{H}(y) \leqslant x\} \quad \text{dla każdego} \quad 0 < x < 1.$$

Oznaczmy przez

$$f_1^*(x) := \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \tag{4.12}$$

funkcję gęstości rozkładu jednostajnego na odcinku $(0,1)$.

Legut i Wilczyński [H4] udowodnili następujące:

Twierdzenie 4.12. *Niech f_1, f_2 będą probabilistycznymi funkcjami gęstości zdefiniowanymi na przestrzeni $\{(0,1), \mathcal{B}\}$ oraz niech f_1^* i f_2^* oznaczają odpowiadające im gęstości zdefiniowane odpowiednio przez (4.12) i (4.11). Wtedy*

$$\mathscr{R}(f_1, f_2) = \mathscr{R}(f_1^*, f_2^*).$$

Co więcej

$$\mathscr{R}(f_1^*, f_2^*) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leqslant x \leqslant 1,\; 1 - G(1-x) \leqslant y \leqslant G(x)\right\},$$

gdzie funkcja $G : [0,1] \to [0,1]$ ma postać

$$G(x) = \int\limits_{\{t: f_1(t)=0\}} f_2(t)\,dt + \int_0^x f_2^*(t)\,dt \quad \text{dla każdego} \quad x \in [0,1]. \tag{4.13}$$

Powyższe twierdzenie może być również wykorzystane do wyznaczenia zbioru $\vec{\mu}_P(\mathscr{P}_2)$. Łatwo sprawdzić, że zbiór $\vec{\mu}_P(\mathscr{P}_2)$ można uzyskać poprzez symetryczne przekształcenie zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ względem prostej $x = \frac{1}{2}$, tzn.

$$\vec{\mu}_P(\mathscr{P}_2) = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 : (1-x, y) \in \ \vec{\mu}(\mathcal{B})\right\}. \tag{4.14}$$

Stąd z (4.6) oraz (4.14) otrzymujemy:

$$\vec{\mu}_P(\mathscr{P}_2) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 - G(x) \leqslant y \leqslant G(1-x)\right\}, \tag{4.15}$$

gdzie funkcja G jest zdefiniowana przez (4.13).

Legut i Wilczyński [H4] zastosowali Twierdzenie 4.12 do obliczenia α-optymalnej wartości oraz wyznaczenia α-optymalnej partycji w przypadku dwuwymiarowym. Udowodnili oni następujące:

Twierdzenie 4.13. *Niech μ_1, μ_2 będą miarami probabilistycznymi zdefiniowanymi na $\{(0,1), \mathcal{B}\}$ z odpowiadającymi im gęstościami f_1, f_2 oraz niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in S_2$. Wtedy*

$$v^\alpha = \frac{x_\alpha}{\alpha_1},$$

gdzie x_α jest pierwiastkiem równania

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x = G(1-x). \tag{4.16}$$

Ponadto α-optymalna partycja ma postać $\{\mathcal{X} \setminus A_2^\alpha, A_2^\alpha\}$, gdzie A_2^α jest dowolnym podzbiorem, dla którego $\mu_1(A_2^\alpha) = 1 - x_\alpha$ oraz spełnione są następujące warunki:

$$\{x : f_2(x) > y_\alpha f_1(x)\} \subset A_2^\alpha \subset \{x : f_2(x) \geqslant y_\alpha f_1(x)\}, \tag{4.17}$$

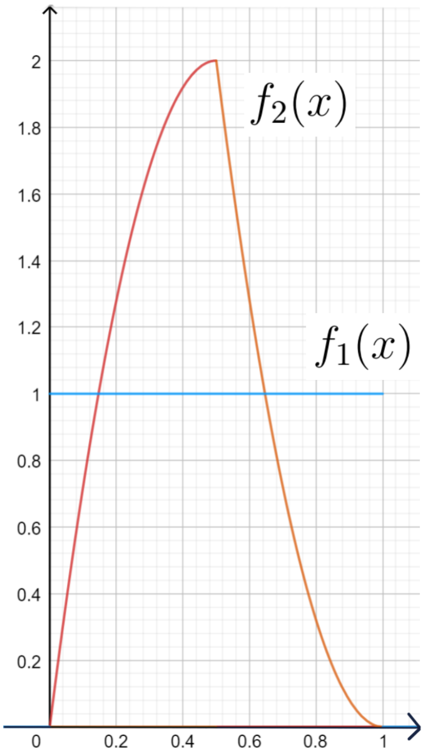
gdzie $y_\alpha = \overline{H}^{\,-1}(1 - x_\alpha)$.

Poniższy przykład ilustruje zastosowanie powyższego twierdzenia.

Przykład 4.14. Niech f_1 będzie gęstością rozkładu jednostajnego na odcinku $(0,1)$ oraz niech f_2 będzie gęstością zdefiniowaną następująco:

$$f_2(x) = I_{(0,\frac{1}{2})}(x)(-8x(x-1)) + I_{[\frac{1}{2},1)}(x) 8(x-1)^2, \quad 0 < x < 1.$$

Wykresy gęstości f_1 i f_2 pokazane są na rysunku poniżej.



Rysunek 1. Funkcje gęstości f_1 i f_2.

Wyznaczymy α-optymalną partycję dla miar μ_1, μ_2 zdefiniowanych przez powyższe funkcje gęstości dla $\alpha = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Najpierw musimy skonstruować funkcję G opisującą brzeg zbioru $\vec{\mu}_P(\mathscr{P}_2)$ przez (4.15). Żadne z założeń wymienionych we Własności 4.11 dla funkcji $r(x)$ zdefiniowanej przez (4.9) nie jest spełnione. Dlatego do wyznaczenia funkcji G wykorzystamy metodę podaną w Twierdzeniu 4.13. Zauważmy, że funkcja f_2 jest rosnąca na przedziale $(0, 1/2)$ oraz malejąca na $[1/2, 1)$. Stąd wynika, że dla $0 < y < 2$

$$\{x : f_2(x) > yf_1(x)\} = \{x : f_2(x) > y\} = (x_1, x_2),$$

gdzie

$$x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{(2-y)}{8}} \quad \text{i} \quad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{y}{8}}$$

są odpowiednio rozwiązaniami równań:

$$y = -8x(x-1),\ x \in (0, 1/2) \quad \text{i} \quad y = 8(x-1)^2,\ x \in [1/2, 1).$$

Stąd mamy

$$\overline{H}(y) = \int\limits_{\{x : f_2(x) > yf_1(x)\}} f_1(x)\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx = \left(1 - \sqrt{\frac{y}{8}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{(2-y)}{8}}\right).$$

Aby znaleźć funkcję $\overline{H}^{\,-1}$, zauważmy że z równania $\overline{H}(y) = x$ wynika, że

$$(y-1)^2 = 1 - 16(1-x)^2x^2,$$

a po wykonaniu prostych obliczeń otrzymujemy

$$\overline{H}^{\,-1}(x) = 1 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{-4x^2 + 4x + 1}, \quad x \in (0,1).$$

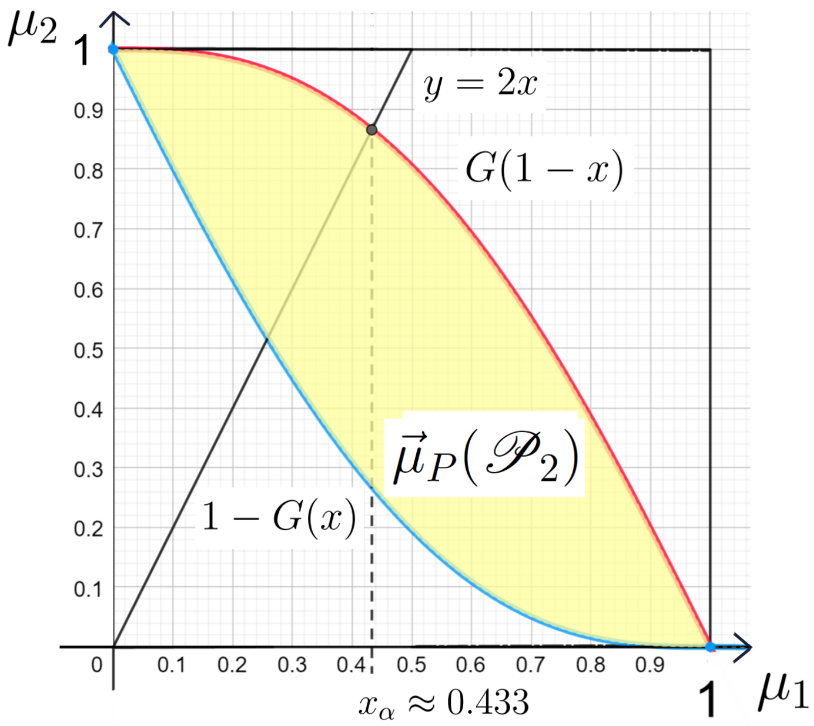
Z uwagi na to, że $\int_{\{t: f_1(t)=0\}} f_2(t)\,dt = 0$ ze wzoru (4.13) wynika, że $f_2^*(x) = \overline{H}^{\,-1}(x)$.
Stąd mamy:

$$G(x) = \int_0^x f_2^*(t)dt = x + \frac{1}{6}\left(1 - 4(x-1)x\right)^{3/2} - \frac{1}{6}. \tag{4.18}$$

Rozwiązując równanie (por. (4.16))

$$2x = G(1-x) = 1 - x + \frac{1}{6}(1 + 4x(1-x))^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \tag{4.19}$$

otrzymujemy $x_\alpha \approx 0.433$, gdzie G jest określona przez (4.18).
Na rysunku poniżej pokazany jest zbiór $\vec{\mu}_P(\mathscr{P}_2)$ oraz graficzne rozwiązanie równania (4.19).



Rysunek 2. Graficzne rozwiązanie równania (4.19).

Wyznaczamy teraz $y_\alpha = f_2^*(1-x_\alpha) \approx 0.811$, gdzie $f_2^*(x) = 1-2\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{-4x^2+4x+1}$.
Łatwo zauważyć, że

$$D(1 - x_\alpha) = [x_1, x_2],$$

gdzie $D(t)$ jest zbiorem zdefiniowanym przez (4.8) oraz

$$x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{(2 - y_\alpha)}{8}} \approx 0.114, \qquad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{y_\alpha}{8}} \approx 0.681.$$

Ostatecznie otrzymujemy przybliżoną postać jawną α-optymalnej partycji

$$A_1^\alpha \approx (0, 0.114) \cup (0.681, 1), \quad A_2^\alpha \approx [0.114, 0.681].$$

$\square$

Interesującym zagadnieniem w teorii sprawiedliwego podziału jest oszacowanie minimalnej liczby cięć potrzebnych do uzyskania podziału, który spełnia pewne kryteria sprawiedliwości. Tym zagadnieniem zajmowało się wielu specjalistów z tej dziedziny (np. [5, 8, 47]). W przypadku podziału α-optymalnego odcinka $(0, 1)$ dla dwóch graczy minimalną liczbę cięć można łatwo oszacować, gdyż postać zbioru A_2^α (por. (4.17)) zależy od liczby zmian znaku funkcji $f_2(x) - y_\alpha f_1(x)$. Legut and Wilczyński [H4] pokazali, że dla dowolnej liczby naturalnej $k \in \mathbb{N}$ można skonstruować takie miary μ_1, μ_2, dla których uzyskanie α-optymalnej partycji wymaga zastosowania $2k$ cięć odcinka $(0, 1)$.

4.3.4. Pewne własności podzbiorów zbioru Lapunowa [H4]

W pracy [H4] zbadano pewne własności obrazu bezatomowej miary wektorowej $\vec{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)$ zdefiniowanej na mierzalnych podzbiorach $\mathcal{B}$ odcinka jednostkowego $[0, 1]$. Niech $\mathcal{U}(k)$ oznacza rodzinę zbiorów będących sumą nie więcej niż k parami rozłącznych podprzedziałów $[0, 1]$. Oznaczmy przez $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ $n-$wymiarowy domknięty odcinek łączący punkty $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n), \mathbf{b} = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Stromquist i Woodall [60] udowodnili, że

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \subset \vec{\mu}(\mathcal{U}(n)), \tag{4.20}$$

gdzie $\mathbf{0} := (0, ..., 0)$, $\mathbf{1} := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$. Legut [H4] pokazał, że własność (4.20) może być sformułowana w ogólniejszej postaci.

Twierdzenie 4.15. *Niech $A \in \mathcal{U}(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Wtedy*

$$\langle \mathbf{0}, \vec{\mu}(A) \rangle \subset \vec{\mu}\left(\mathcal{U}(n + k - 1)\right).$$

Z Twierdzenia 4.15 wynika:

Własność 4.16. *Jeśli brzeg zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ jest podzbiorem $\vec{\mu}(\mathcal{U}(k))$, wtedy*

$$\vec{\mu}(\mathcal{B}) = \vec{\mu}\left(\mathcal{U}(n + k - 1)\right).$$

Głównym wynikiem pracy [H4] jest następujące:

Twierdzenie 4.17. *Niech $A, B \in \mathcal{U}(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Wtedy,*

$$\langle \vec{\mu}(A), \vec{\mu}(B) \rangle \subset \vec{\mu}\left(\mathcal{U}(2n + 4k - 3)\right).$$

Legut [H4] wykorzystał Twierdzenie 4.17 do przedstawienia prostego dowodu tej części tezy twierdzenia Lapunowa (Twierdzenie 4.2), która dotyczy wypukłości zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{B})$. Z Twierdzenia 4.17 wynika również następująca:

Własność 4.18. *Załóżmy, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ wszystkie punkty ekstremalne obrazu $\vec{\mu}(\mathcal{B})$ należą do zbioru $\vec{\mu}(\mathcal{U}(k))$. Wtedy $\vec{\mu}\,(\mathcal{B}) = \vec{\mu}(\mathcal{U}(2n+4k-3))$.*

Rozważmy teraz przypadek dwuwymiarowej miary wektorowej $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, w którym miary μ_1, μ_2 zdefiniowane są na podzbiorach mierzalnych przedziału $(0,1)$ odpowiednio przez funkcje gęstości f_1 i f_2 spełniające warunki:

$$\{x : f_1(x) > 0\} = \{x : f_1(x) > 0\} = (0,1).$$

Z Własności 4.18 oraz 4.10 wynika następująca:

Własność 4.19. *Niech $r(x)$ będzie funkcją zdefiniowaną przez (4.9). Prawdziwe są następujące implikacje:*

- *Jeśli funkcja $r(x)$ jest monotoniczna na przedziale $(0,1)$, wtedy $\vec{\mu}(\mathcal{B}) = \vec{\mu}(\mathcal{U}(2))$.*
- *Jeśli funkcja $r(x)$ jest monotoniczna na przedziale $(0,1/2)$ i symetryczna względem prostej $x_0 = 1/2$, wtedy $\vec{\mu}(\mathcal{B}) = \vec{\mu}(\mathcal{U}(3))$.*

4.3.5. Metoda optymalnego podziału odcinka $[0,1)$ pomiędzy n graczy [H5]

W tym rozdziale przedstawimy metodę wyznaczania równomiernie optymalnych partycji przestrzeni mierzalnej $\{[0,1), \mathcal{B}\}$ dla bezatomowych miar probabilistycznych zdefiniowanych przy pomocy pewnej klasy funkcji gęstości $f_i : [0,1) \to \mathbb{R}_+$, $i \in I$, (por. (4.5)). Tutaj $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę podzbiorów mierzalnych odcinka $[0,1)$.

Niech $[a_j, a_{j+1})\}_{j=1}^{m}$ będzie podziałem odcinka $[0,1)$ takim, że

$$[0,1) = \bigcup_{j=1}^{m} [a_j, a_{j+1}), \;\; a_1 = 0,\, a_{m+1} = 1,\; a_{j+1} > a_j,\; j \in J, \tag{4.21}$$

gdzie $J = \{1, ..., m\}$.

Dall'Aglio, Legut i Wilczyński [22] podali metodę $\alpha-$optymalnego podziału odcinka $[0,1]$ w przypadku, gdy funkcje gęstości są funkcjami prostymi, tzn. funkcjami postaci:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} \mathbb{I}_{[a_j, a_{j+1})}(x).$$

W metodzie tej autorzy cytowanej pracy wykorzystali zadanie programowania liniowego. Metodę tą uogólnił Legut [35] rozważając kawałkami liniowe funkcje gęstości:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} (c_{ij}x + d_{ij}) \mathbb{I}_{[a_j, a_{j+1})}(x),$$

gdzie $c_{ij}x + d_{ij} \geqslant 0$ dla każdego $x \in [a_j, a_{j+1})$, $i \in I$, $j \in J$.

Teraz zdefiniujemy pewną klasę funkcji gęstości f_i, $i \in I$, korzystając z własności monotonicznych ilorazów wiarogodności.

Definicja 4.20. Funkcje gęstości $f_i : [0,1) \to \mathbb{R}_+$, $i \in I$, posiadają na przedziale $[a,b) \subset [0,1)$ *własność ściśle monotonicznych ilorazów wiarogodności* (w skrócie ang. SMLR - Strictly Monotone Likelihood Ratio property), jeśli dla dowolnego $i, k \in I$, $i \neq k$, ilorazy $\dfrac{f_i(x)}{f_k(x)}$ są ściśle monotoniczne na przedziale $[a,b) \subset [0,1)$.

Definicja 4.21. Funkcje gęstości $f_i : [0,1) \to \mathbb{R}_+$, $i \in I$, posiadają na przedziale $[0,1)$ *własność kawałkami ściśle monotonicznych ilorazów wiarogodności* (w skrócie ang. PSMLR - Piecewise Strictly Monotone Likelihood Ratio property), jeśli istnieje partycja $\{[a_j, a_{j+1})\}_{j=1}^m$ przedziału $[0,1)$ spełniająca warunki (4.21) taka, że funkcje gęstości f_i na każdym z tych przedziałów z osobna posiadają ściśle monotoniczne ilorazy wiarogodności (SMLR).

Następująca własność może być pomocna do sprawdzenia, czy dane funkcje gęstości f_i, $i \in I$, posiadają własność PSMLR.

Własność 4.22. *Załóżmy, że funkcje gęstości f_i są różniczkowalne. Funkcje f_i posiadają własność PSMLR wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór*

$$Q := \{x \in (0,1) : f_i'(x) f_k(x) = f_i(x) f_k'(x),\ i, k \in I,\ i \neq k\} \tag{4.22}$$

jest skończony.

Z Własności 4.22 wynika, że wielomiany dodatniego stopnia będące funkcjami gęstości zdefiniowanymi na przedziale $[0,1)$ posiadają własność PSMLR.

Rozważmy problem optymalnego podziału dla dwóch graczy z następującymi funkcjami gęstości

$$f_1(x) = \mathbb{I}_{[0,1)}(x) \quad \text{i} \quad f_2(x) = x \sin \frac{1}{x} + c, \quad x \in [0,1),$$

gdzie stała c jest tak dobrana, że spełniona jest równość $\int_0^1 f_1(x)dx = 1$. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku zbiór Q zdefiniowany przez (4.22) ma nieskończoną liczbę elementów, więc te funkcje gęstości nie posiadają własności PSMLR.
Zdefiniujmy absolutnie ciągłe oraz ściśle rosnące funkcje $F_i : [0,1] \to [0,1]$ następująco

$$F_i(t) = \int_0^t f_i(x)\, dx, \quad t \in [0,1], \quad i \in I. \tag{4.23}$$

Do konstrukcji podziału równomiernie optymalnego będzie potrzebna następująca:

Własność 4.23. *Załóżmy, że funkcje gęstości f_i, $i \in I$, posiadają własność SMLR na przedziałach $[a_j, a_{j+1})\}_{j=1}^m$ spełniających warunki (4.21). Wtedy dla dowolnych liczb θ_1, θ_2 spełniających nierówności $a_j \leqslant \theta_1 < \theta_2 < a_{j+1}$, $j \in J$, oraz dowolnych $i, k \in I$, $i \neq k$, jedna z poniższych nierówności:*

$$\frac{F_i(t) - F_i(\theta_1)}{F_i(\theta_2) - F_i(\theta_1)} < \frac{F_k(t) - F_k(\theta_1)}{F_k(\theta_2) - F_k(\theta_1)}, \tag{4.24}$$

$$\frac{F_i(t) - F_i(\theta_1)}{F_i(\theta_2) - F_i(\theta_1)} > \frac{F_k(t) - F_k(\theta_1)}{F_k(\theta_2) - F_k(\theta_1)} \tag{4.25}$$

jest spełniona dla każdego $t \in (\theta_1, \theta_2)$.

Nierówności (4.24) i (4.25) oznaczają, że istnieje relacja względnej ścisłej wypukłości pomiędzy funkcjami F_i i F_k, $i \neq k$, zdefiniowanymi przez (4.23). Gdy spełniona jest nierówność (4.24), wtedy mówimy, że F_i jest ściśle wypukła względem F_k. Własność ta jest równoważna ścisłej wypukłości złożenia funkcji $F_i \circ F_k^{-1}$ zdefiniowanej na przedziale $(F_k(a_j), F_k(a_{j+1}))$ (por. [45]). Z pewnego wyniku uzyskanego przez Shisha i Cargo [54] można wywnioskować, że $F_i \circ F_k^{-1}$ jest ściśle wypukła na $(F_k(a_j), F_k(a_{j+1}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz $\dfrac{f_i(x)}{f_k(x)}$ jest ściśle rosnący na przedziale (a_j, a_{j+1}). Stąd odwrotna implikacja we Własności 4.23 jest także prawdziwa.

Relacja ścisłej wypukłości indukuje na każdym z przedziałów (a_j, a_{j+1}) ścisłe częściowe uporządkowanie funkcji F_i (por. [45]). Niech $F_i \prec_j F_k$ oznacza, że F_i jest ściśle wypukła względem F_k na przedziale (a_j, a_{j+1}). Dla każdego $j \in J$ definiujemy permutację $\sigma_j : I \to I$, taką że

$$F_{\sigma_j(k+1)} \prec_j F_{\sigma_j(k)},$$

dla $k = 1, ..., n-1$. Stąd dla dowolnego $t \in (a_j, a_{j+1})$ mamy

$$\frac{F_{\sigma_j(k+1)}(t) - F_{\sigma_j(k+1)}(a_j)}{F_{\sigma_j(k+1)}(a_{j+1}) - F_{\sigma_j(k+1)}(a_j)} < \frac{F_{\sigma_j(k)}(t) - F_{\sigma_j(k)}(a_j)}{F_{\sigma_j(k)}(a_{j+1}) - F_{\sigma_j(k)}(a_j)}. \tag{4.26}$$

Następujące twierdzenie udowodnione przez Leguta [H5] przedstawia algorytm wyznaczania równomiernie optymalnych partycji dla funkcji gęstości posiadających własność PSMLR.

Twierdzenie 4.24. *Niech zbiór liczb z^*, $\{x_k^{*(j)}\}, k = 1, ..., n-1$, $j \in J$, będzie rozwiązaniem następującego zadania programowania nieliniowego (NLP)*

$$\max z$$

przy ograniczeniach:

$$z = \sum_{j=1}^{m} \left[F_i(x^{(j)}_{\sigma_j(i)}) - F_i(x^{(j)}_{\sigma_j(i)-1}) \right] \quad i = 1, ..., n,$$

względem zmiennych z, $\{x_k^{(j)}\}$, $k = 1, ..., n-1, j \in J$, spełniających następujące nierówności:

$$0 = a_1 \leqslant x_1^{(1)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(1)} \leqslant a_2,$$
$$a_2 \leqslant x_1^{(2)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(2)} \leqslant a_3,$$
$$...$$
$$a_m \leqslant x_1^{(m)} \leqslant ... \leqslant x_{n-1}^{(m)} \leqslant a_{m+1} = 1.$$

Wtedy partycja $\{A_i^*\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n$ przedziału jednostkowego $[0, 1)$ zdefiniowana przez

$$A_i^* = \bigcup_{j=1}^{m} \left[x^{*(j)}_{\sigma_j(i)-1}, x^{*(j)}_{\sigma_j(i)} \right), \ i \in I, \tag{4.27}$$

gdzie $x_0^{*(j)} = a_j$, $x_n^{*(j)} = a_{j+1}$, $j \in J$, jest równomiernie optymalnym podziałem dla miar μ_i, $i \in I$, oraz $v = z^*$ jest optymalną wartością.

Jeśli dla pewnego $i \in I$ oraz $j \in J$, zachodzi równość $x^{*(j)}_{\sigma_j(i)-1} = x^{*(j)}_{\sigma_j(i)}$, wtedy przyjmujemy $\left[x^{*(j)}_{\sigma_j(i)-1}, x^{*(j)}_{\sigma_j(i)}\right) = \emptyset$ w sumie przedziałów (4.27).

Twierdzenie 4.24 może być uogólnione dla konstrukcji podziałów $\alpha-$optymalnych, jednak sformułowanie i dowód takiego twierdzenia byłby bardzo skomplikowany.

Poniższy przykład ilustruje metodę opisaną w Twierdzeniu 4.24.

Przykład 4.25. Rozważmy problem sprawiedliwego podziału dla trzech graczy $I = \{1, 2, 3\}$, którzy oceniają mierzalne podzbiory odcinka jednostkowego $[0, 1)$ za pomocą miar μ_i, $i = 1, 2, 3$, zdefiniowanych odpowiednio przez następujące funkcje gęstości:

$$f_1(x) := 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, f_2(x) := 2x,\ f_3(x) := \mathbb{I}_{[0,1)}(x), \quad x \in [0, 1).$$

Zastosujemy algorytm opisany w Twierdzeniu 4.24 do wyznaczenia równomiernie optymalnego podziału. Najpierw musimy podzielić odcinek $[0, 1)$ na podprzedziały, na których gęstości f_i, $i = 1, 2, 3$, posiadają własność SMLR. Do tego celu wyznaczymy zbiór Q zdefiniowany przez (4.22). Okazuje się, że $Q = \{\frac{1}{2}\}$ i stąd z Własności 4.22 wynika, że gęstości f_i, $i = 1, 2, 3$, spełniają własność SMLR z osobna na dwóch przedziałach $[0, \frac{1}{2})$ i $[\frac{1}{2}, 1)$. Niech F_i, $i = 1, 2, 3$, będą ściśle rosnącymi funkcjami zdefiniowanymi przez (4.23). Wyznaczając te funkcje otrzymujemy:

$$F_1(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t,\ F_2(t) = t^2,\ F_3(t) = t, \quad t \in [0, 1).$$

W oparciu o nierówności (4.26) ustalamy odpowiednie przypisanie trzech podprzedziałów w każdym z przedziałów $[0, \frac{1}{2})$ oraz $[\frac{1}{2}, 1)$ w następujący sposób: bierzemy środkowe punkty $\{\frac{1}{4}\}$ i $\{\frac{3}{4}\}$ tych przedziałów i sprawdzamy, że

$$\frac{F_1(1/4) - F_1(0)}{F_1(\frac{1}{2}) - F_1(0)} > \frac{F_3(1/4) - F_3(0)}{F_3(\frac{1}{2}) - F_3(0)} > \frac{F_2(1/4) - F_2(0)}{F_2(\frac{1}{2}) - F_2(0)},$$

oraz

$$\frac{F_3(3/4) - F_3(0)}{F_3(1) - F_3(\frac{1}{2})} > \frac{F_2(3/4) - F_2(0)}{F_2(1) - F_2(\frac{1}{2})} > \frac{F_1(3/4) - F_1(0)}{F_1(1) - F_1(\frac{1}{2})}.$$

Stąd uzyskujemy następujące permutacje:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz możemy, tak jak w Twierdzeniu 4.24, sformułować zadanie programowania nieliniowego:

$$\max z$$

przy ograniczeniach

$$z = F_1(x_1^{(1)}) - F_1(0) + F_1(1) - F_1(x_2^{(2)}),$$

$$z = F_2(\tfrac{1}{2}) - F_2(x_1^{(2)}) + F_2(x_2^{(2)}) - F_2(x_2^{(1)}),$$

$$z = F_3(x_1^{(2)}) - F_3(x_1^{(1)}) + F_3(x_2^{(1)}) - F_3(\tfrac{1}{2}),$$

względem zmiennych $z, \{x_k^{(j)}\}$ $k = 1, 2, j = 1, 2$, spełniających następujące nierówności:

$$0 \leqslant x_1^{(1)} \leqslant x_1^{(2)} \leqslant \tfrac{1}{2} \leqslant x_2^{(1)} \leqslant x_2^{(2)} \leqslant 1.$$

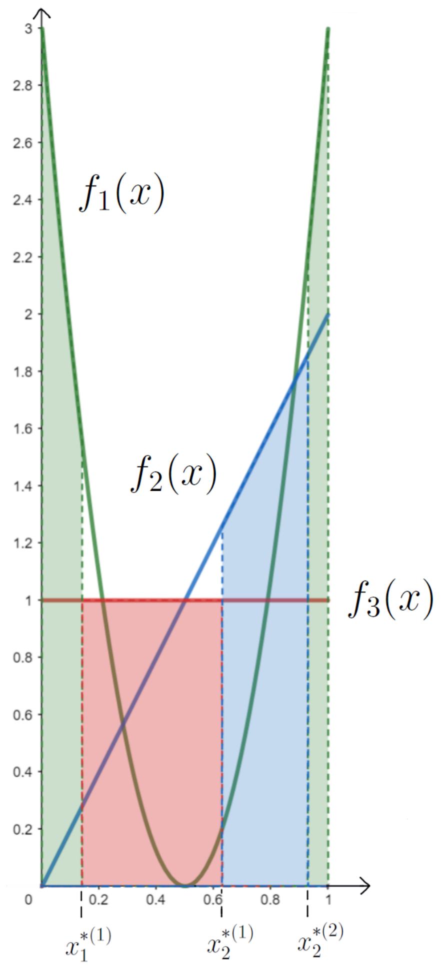
Rozwiązując to zadanie otrzymujemy:

$$z^* \approx 0.4843,\ x_1^{*(1)} \approx 0.1426,\ x_1^{*(2)} = a_2 = 0.5,\ x_2^{*(1)} \approx 0.6269, x_2^{*(2)} \approx 0.9367.$$

Stąd uzyskujemy równomiernie optymalny podział $\{A_i^*\}_{i=1}^3 \in \mathscr{P}_3$ odcinka jednostkowego $[0, 1)$, gdzie

$$A_1^* = [0, x_1^{*(1)}) \cup [x_2^{*(2)}, 1), \quad A_2^* = [x_2^{*(2)}, x_2^{*(1)}) \quad \text{oraz} \quad A_3^* = [x_2^{*(1)}, x_1^{*(1)}).$$

Optymalna wartość $v = z^* \approx 0.4843$. Na rysunku poniżej pokazano uzyskany równomierny optymalny podział.



Rysunek 3. Ilustracja równomiernego optymalnego podziału

Na Rysunku 3 zaznaczone zostały pewne obszary kolorem zielonym, niebieskim i czerwonym. Pola tych obszarów odpowiadają odpowiednio wartościom $\{\mu_i(A_i^*)\}_{i=1}^3$ zbiorów $\{A_i^*\}_{i=1}^3$ tworzących uzyskany w tym przykładzie równomierny optymalny podział.

$\square$

Legut [H5] wykorzystał również metodę opisaną w Twierdzeniu 4.24 do wyznaczania równomiernie ε-optymalnego podziału w przypadku, gdy zbiór Q zdefiniowany przez (4.22) jest przeliczalny i nieskończony. Definicja równomiernie ε-optymalnego podziału jest następująca:

Definicja 4.26. Partycja $P^\varepsilon = \{A_i^\varepsilon\}_{i=1}^n \in \mathscr{P}_n$ nazywa się *równomiernie ε-optymalnym podziałem*, jeśli dla każdego $i \in I$ prawdziwe są nierówności:

$$\mu_i(A_i^\varepsilon) > v - \varepsilon,$$

gdzie v jest wartością optymalną.

4.3.6. Prosty sprawiedliwy podział kwadratu jednostkowego $(0,1)^2$ [H6]

Jednym z najciekawszych problemów dotyczących podziału sprawiedliwego odcinka jednostkowego $(0,1)$ jest jego podział na podprzedziały $\{(x_{k-1}, x_k)\}_{k=1}^n$, gdzie

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = 1,$$

w taki sposób, aby każdy z graczy uzyskał swój kawałek w postaci spójnego podprzedziału. Taki podział nazywamy *prostym podziałem sprawiedliwym*. Stromquist [59] i niezależnie Woodall [62] udowodnili istnienie prostego sprawiedliwego podziału odcinka $(0,1)$, który jednocześnie jest podziałem wolnym od zazdrości. Istnienie prostego podziału sprawiedliwego pokazali również Cechlárová, Doboš i Pillárová [11] oraz Aumann i Dombb [3]. Ciekawy i bardzo krótki dowód istnienia prostego sprawiedliwego podziału wykorzystujący twierdzenie Borsuka-Ulama przedstawił Chéze [12].

W pracy [H6] opublikowałem wyniki badań dotyczących istnienia prostego sprawiedliwego podziału kwadratu jednostkowego $\{(0,1)^2, \mathcal{B}\}$. W tym rozdziale $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę podzbiorów mierzalnych otwartego kwadratu jednostkowego $(0,1)^2$. Przypuśćmy, że $i-$ty gracz ocenia podzbiory mierzalne $\mathcal{B}$ przy pomocy bezatomowej miary ν_i, przy czym zakładamy, że miary te są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a λ zdefiniowanej na mierzalnych podzbiorach $(0,1)^2$. Zakładamy również, że istnieją funkcje gęstości $u_i(x,y) : (0,1)^2 \to \mathbb{R}_+$ spełniające warunki:

$$u_i(x,y) > 0 \quad \text{dla każdego} \quad (x,y) \in (0,1)^2 \quad \text{oraz} \tag{4.28}$$

$$\nu_i(A) = \iint_A u_i(x,y)dxdy \quad \text{dla każdego} \quad A \in \mathcal{B}. \tag{4.29}$$

Podział kwadratu jednostkowego może być interpretowany jako podział działki (gruntu). Takie podziały są uważane przez ekonomistów jako jedne z najważniejszych zastosowań teorii sprawiedliwego podziału w praktyce. W literaturze przedmiotu prezentowane są różne procedury i algorytmy podziału obiektów dwuwymiarowych, które spełniają różne kryteria (por. [6, 19, 39, 40, 44, 50]). Woodall [62] zauważył, że problem sprawiedliwego podziału kwadratu jednostkowego może być sprowadzony do problemu podziału jednowymiarowego odcinka poprzez proste rzutowanie kwadratu $(0,1)^2$ na odcinek $(0,1)$. Niestety, jeśli liczba graczy jest duża, to uzyskane w ten sposób wąskie prostokąty są bezużyteczne w praktycznych zastosowaniach.

Oznaczmy przez $\mathbb{C}_n$ następujący zbiór skończonych ciągów:

$$\mathbb{C}_n := \{\mathbf{c} = (c_1, ..., c_r) : c_j \in \mathbb{N},\ j = 1, ..., r,\ \sum_{j=1}^{r} c_j = n,\ 2 \leqslant r \leqslant n\}.$$

Dla danego ciągu $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_r) \in \mathbb{C}_n$ rozważmy następującą procedurę podziału:

1. Dzielimy kwadrat $(0,1)^2$ stosując horyzontalne cięcia rozpoczynając od punktów $\{h_1, ..., h_{r-1}\}$ położonych na osi Oy, takich że $0 < h_1 < ... < h_{r-1} < 1$.

2. Następnie każdy z powstałych r prostokątów $(0,1) \times (h_{j-1}, h_j)$, $j = 1, ..., r$, gdzie $h_r = 1$ i $h_0 = 0$ zostawiamy w całości (jeśli $c_j = 1$) lub dzielimy je cięciami równoległymi do osi Oy na $c_j > 1$ części.

Stosując tą procedurę uzyskamy n prostokątów, które mają być przydzielone n graczom. Zdefiniujmy dwuwymiarową wersję prostego podziału odcinka $(0,1)$.

Definicja 4.27. Dla ustalonego ciągu $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_r) \in \mathbb{C}_n$ partycję $P_{\mathbf{c}} = \{A_i\}_{i=1}^n$ nazywamy *prostym podziałem kwadratu* $(0,1)^2$, jeśli istnieją liczby $\{h_j\}_{j=0}^r$ oraz $\{x_k^{(j)}\}_{k=0}^{c_j}$ spełniające warunki

$$0 = h_0 < h_1 < ... < h_{r-1} < h_r = 1, \tag{4.30}$$

i

$$0 = x_0^{(j)} < x_1^{(j)} < ... < x_{c_j}^{(j)} = 1, \tag{4.31}$$

oraz takie, że zbiór A_i zdefiniowany jest następująco

$$A_i := (x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)}) \times (h_{j-1}, h_j) \Leftrightarrow i = \sum_{m=0}^{j-1} c_m + k, \tag{4.32}$$

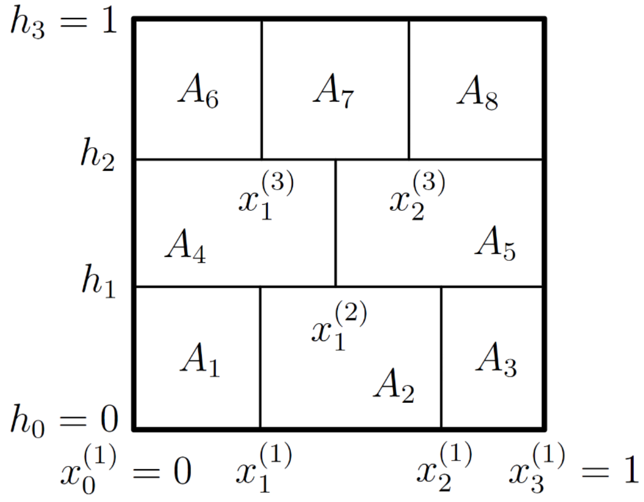
gdzie $c_0 = 0$.

Z założenia $\nu_i \ll \lambda$, $i \in I$, wynika, że brzegi zbiorów A_i mają dla każdej miary ν_i miarę 0. Stąd

$$\nu_i \left(\cup_{l=1}^n A_l\right) = 1, \quad i \in I.$$

Z tego powodu dla uproszczenia notacji bierzemy pod uwagę zbiory otwarte A_i zdefiniowane przez (4.32).

Procedura prostego podziału została zilustrowana na Rysunku 4.



Rysunek 4. Przykład podziału kwadratu $(0,1)^2$ zgodnie z Definicją 4.27 dla parametrów $n = 8$ i $\mathbf{c} = (3, 2, 3)$.

W pracy [H6] udowniłem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.28. *Dla dowolnych miar probabilistycznych $\nu_i \ll \lambda$, $i \in I$, zdefiniowanych przez (4.29), spełniających (4.28) i dla każdego ciągu $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_r) \in \mathbb{C}_n$ istnieją liczby $\{h_j\}_{j=0}^{r}$ i $\{x_k^{(j)}\}_{k=0}^{c_j}$ spełniające warunki (4.30), (4.31) takie, że prawdziwe są następujące równości:*

$$\nu_i(A_i) = \nu_m(A_m) \quad \textit{dla każdego} \quad i, m \in I,$$

gdzie $P_{\mathbf{c}} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ jest prostym podziałem zdefiniowanym przez (4.32). Co więcej podział $P_{\mathbf{c}} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Równomierny podział $P_{\mathbf{c}} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ występujący w tezie powyższego twierdzenia nie musi być podziałem proporcjonalnym. Dowód tego twierdzenia nie jest konstruktywny. Wykorzystuje on twierdzenie Borsuka-Ulama. Metodę konstrukcji prostego proporcjonalnego podziału kwadratu $(0,1)^2$ przedstawiłem w dowodzie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.29. *Dla dowolnych miar probabilistycznych $\nu_i \ll \lambda$, $i \in I$, zdefiniowanych przez (4.29), spełniających (4.28) i dla każdego ciągu $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_r) \in \mathbb{C}_n$ istnieją liczby $\{h_j\}_{j=0}^{r}$ i $\{x_k^{(j)}\}_{k=0}^{c_j}$ spełniające warunki (4.30), (4.31) oraz permutacja $\sigma : I \to I$ taka, że spełnione są następujące nierówności:*

$$\nu_{\sigma(i)}(A_i) \geqslant \frac{1}{n} \quad \textit{dla każdego} \quad i \in I, \tag{4.33}$$

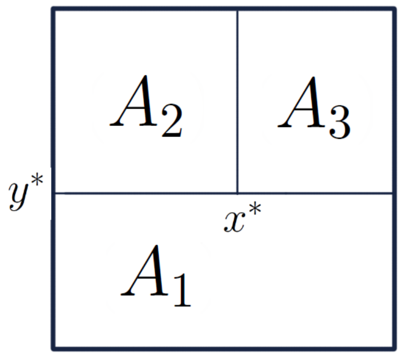
gdzie partycja $P_{\mathbf{c}} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ jest prostym proporcjonalnym podziałem zdefiniowanym przez (4.32).

Następujący przykład ilustruje konstrukcyjną metodę wyznaczania prostego podziału proporcjonalnego kwadratu jednostkowego pomiędzy trzech graczy.

Przykład 4.30. Przypuśćmy, że trzech graczy $I = \{1, 2, 3\}$ ocenia mierzalne podzbiory kwadratu $(0,1)^2$ przy pomocy miar probabilistycznych $\{\nu_i\}_{i=1}^{3}$ zdefiniowanych przez odpowiadające im funkcje gęstości u_i, $i \in I$, zdefiniowane następująco:

$$u_1(x, y) = x + y, \quad u_2(x, y) = 4xy, \quad u_3(x, y) = 4x(1 - y), \quad \text{dla} \quad (x, y) \in (0,1)^2.$$

Pokażemy metodę wyznaczenia prostego podziału proporcjonalnego kwadratu dla $\mathbf{c} = (1,2) \in \mathbb{C}_3$. Schemat tego podziału pokazany jest na poniższym rysunku.



Rysunek 5. Schemat podziału dla $\mathbf{c} = (1,2) \in \mathbb{C}_3$.

Wystarczy wyznaczyć tylko dwie liczby $y^* = h_1$ i $x^* = x_1^{(2)}$ (por. Rysunek 4 i 5) oraz permutację $\sigma : I \to I$ taką, że

$$\nu_{\sigma(1)}(A_1) = \nu_{\sigma(1)}((0,1) \times (0,y^*)) \geqslant \frac{1}{3},$$
$$\nu_{\sigma(2)}(A_2) = \nu_{\sigma(2)}((0,x^*) \times (y^*,1)) \geqslant \frac{1}{3},$$
$$\nu_{\sigma(3)}(A_3) = \nu_{\sigma(3)}((x^*,1) \times (y^*,1)) \geqslant \frac{1}{3}.$$

Przedstawiona poniżej metoda oparta jest na procedurze sprawiedliwego podziału tortu znalezionej przez Banacha i Knastera a zaprezentowanej przez Steinhausa [57] w 1949 roku.

Zdefiniujmy ciągłe funkcje $w_i : [0,1] \to [0,1]$ następująco:

$$w_i(t) := \int_0^t dy \int_0^1 u_i(x,y)dx, \quad i \in I.$$

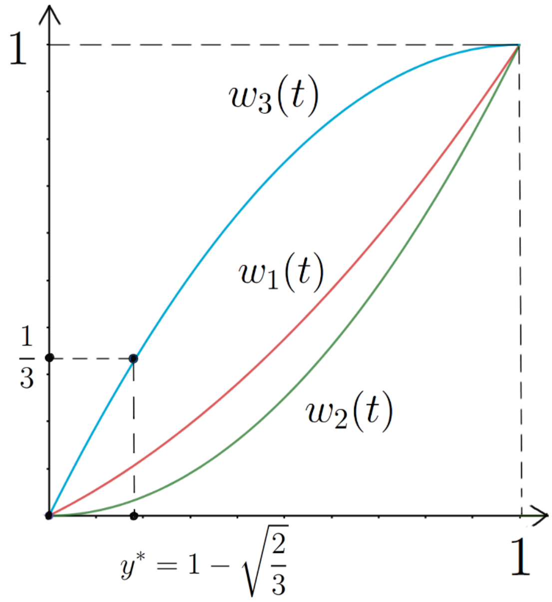
Wykonując proste obliczenia otrzymujemy:

$$w_1(t) = \frac{1}{2}(t + t^2), \quad w_2(t) = t^2, \quad w_3(t) = 2t - t^2, \quad t \in [0,1].$$

Niech

$$y^* = \min\left\{t : \max_{i \in I} w_i(t) \geqslant \frac{1}{3}\right\}.$$

Sposób wyznaczenia liczby y^* jest zilustrowany na rysunku poniżej.



Rysunek 6. Ilustracja wyznaczenia liczby y^*.

Dokonując prostych obliczeń otrzymujemy

$$y^* = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.184, \quad \text{oraz} \quad w_3(y^*) = \frac{1}{3}.$$

Stąd

$$\nu_3(A_1) = \nu_{\sigma(1)}((0,1) \times (0, y^*)) = \frac{1}{3},$$

tak więc zbiór $A_1 = (0,1) \times (0, y^*)$ przydzielamy trzeciemu graczowi. Przyjmujemy, że $\sigma(1) = 3$. Łatwo zauważyć, że

$$\nu_i((0,1) \times (y^*, 1)) \geqslant \frac{2}{3}, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2.$$

Prostokąt $(0,1) \times (y^*, 1)$ może być łatwo podzielony sprawiedliwie pomiędzy pozostałych dwóch graczy przy pomocy cięcia w punkcie x^*. W tym celu możemy zastosować metodę "jeden dzieli, drugi wybiera". Załóżmy, że drugi gracz ma podzielić prostokąt jednym cięciem na dwie części, a pierwszy gracz ma wybrać jeden z powstałych kawałków. Drugi gracz powinien wykonać pionowe cięcie w punkcie x^*, w taki sposób, aby spełniony był warunek

$$\nu_2((0, x^*) \times (y^*, 1)) = \nu_2((x^*, 1) \times (y^*, 1)). \tag{4.34}$$

W ten sposób zagwarantuje sobie, że dostanie przynajmniej połowę prostokąta $(0,1) \times (y^*, 1)$ według jego własnej miary. Rozwiązując równanie (4.34) względem x^* otrzymujemy $x^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Teraz pierwszy gracz ocenia powstałe dwa prostokąty według swojej miary:

$$\nu_1((0, x^*) \times (y^*, 1)) = \frac{1}{12}(-2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx 0,546,$$

$$\nu_1((x^*, 1) \times (y^*, 1)) = \frac{1}{12}(-4 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{6}) \approx 0,346.$$

Stąd pierwszy gracz oczywiście wybierze prostokąt $(0, x^*) \times (y^*, 1)$ a pozostały kawałek $(x^*, 1) \times (y^*, 1)$ otrzymuje drugi gracz, który ocenia jego wartość:

$$\nu_2((x^*, 1) \times (y^*, 1)) = \frac{1}{3}(\sqrt{6} - 1) \approx 0,483.$$

Przyjmujemy $\sigma(2) = 1$ i $\sigma(3) = 2$. Ostatecznie otrzymujemy następującą permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

która ustala odpowiednie przydzielenie zbiorów A_i, $i \in I$, trzem graczom. Uzyskany podział jest podziałem proporcjonalnym.

□

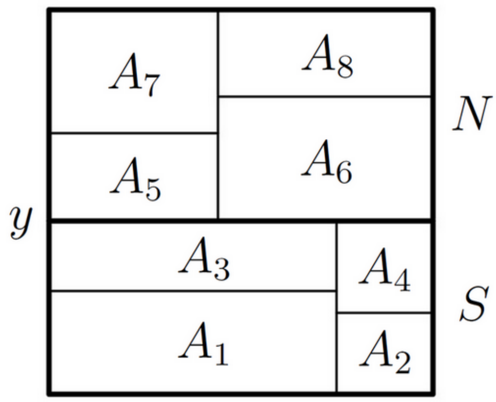
Głównym wynikiem pracy [H6] jest dowód twierdzenia o istnieniu równomiernego, prostego podziału kwadratu $(0,1)^2$, który jest jednocześnie proporcjonalny. Dowód tego twierdzenia jest oparty na Twierdzeniu 4.28 i 4.29.

Twierdzenie 4.31. *Dla dowolnych miar probabilistycznych $\nu_i \ll \lambda$, $i \in I$, zdefiniowanych przez (4.29), spełniających (4.28) i dla każdego ciągu $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_r) \in \mathbb{C}_n$, istnieje permutacja $\sigma : I \to I$ oraz równomierny prosty i proporcjonalny podział $\{A_i\}_{i=1}^n$ zdefiniowany przez (4.32) taki, że*

$$\nu_{\sigma(i)}(A_i) \geqslant \frac{1}{n} \quad \textit{dla każdego} \quad i \in I. \tag{4.36}$$

Konstrukcja proporcjonalnego podziału pokazanego w Przykładzie 4.30 określa przypisanie zbiorów A_i, $i \in I$, poszczególnym graczom według wyznaczonej permutacji (4.35). Z dowodu Twierdzenia 4.31 wynika, że ta permutacja jest tą samą permutacją, która definiuje przypisanie zbiorów A_i w Twierdzeniu 4.31 tworząc w ten sposób prosty podział będący jednocześnie równomiernym i proporcjonalnym.

Okazuje się, że teza Twierdzenia 4.31 może być rozszerzona na bardziej skomplikowane partycje. Przypuśćmy, że $n = 8$. Najpierw dzielimy kwadrat na dwie części horyzontalnym cięciem, a następnie każdy z powstałych prostokątów dzielimy dwoma pionowymi cięciami. Na końcu dzielimy otrzymane kawałki poziomymi cięciami otrzymując w sumie 8 zbiorów.



Rysunek 7. Przykład procedury podziału, w którym stosujemy na przemian cięcia horyzontalne i pionowe.

W swoich dalszych badaniach planuję uogólnić wynik Twierdzenia 4.31 na przypadek podziału prostego zbioru $(0,1)^k$ dla $k > 2$. Również planuję zbadać, czy istnieje podział prosty kwadratu $(0,1)^2$, który jest jednocześnie wolny od zazdrości.

4.4. Opis wkładu habilitanta w osiągnięcie naukowe

Prace [H1,H3,H5,H6] zostały napisane samodzielnie.

Praca [H2]

- Pomysł na zbadanie, czy istnieją sposoby konstrukcji $\alpha-$optymalnego podziału stanowi własny wkład habilitanta.
- Postawienie hipotezy oraz opracowanie koncepcji pracy powstało wspólnie ze współautorem.
- Sformułowanie Twierdzenia 3 oraz jego dowód powstał wspólnie z dr hab. Maciejem Wilczyńskim.

Swój udział w napisaniu pracy [H2] oceniam na 50%.

Praca [H4]

- Sformułowanie problemu dotyczącego wyznaczania obrazu dwuwymiarowej bezatomowej miary wektorowej stanowi własny wkład habilitanta.
- Pomysł na napisanie pracy powstał wspólnie z dr hab. Maciejem Wilczyńskim.
- Postawienie hipotezy dotyczącej metody wyznaczania obrazu miary wektorowej stanowi własny wkład habilitanta.
- Swój udział w udowodnieniu Twierdzenia 2 oceniam na 30%.
- Opracowanie trzech przykładów ilustrujących uzyskane wyniki stanowi własny wkład habilitanta.
- Napisanie całego Rozdziału 4 dotyczącego zastosowań uzyskanych w pracy wyników w teorii sprawiedliwego podziału stanowi własny wkład habilitanta.

Swój udział w napisaniu pracy [H4] oceniam na 50%.

4.5. Omówienie wybranych publikacji wchodzących w skład dorobku naukowego

Pozostałe moje osiągnięcia naukowe nie ujęte w Rozdziale 4.3 zostały przedstawione w następujących artykułach:

[D1] Legut J.: *Market Games with a Continuum of Indivisible Commodities*, International Journal of Game Theory, 15, 1-7 (1985)

[D2] Legut J.: *The Problem of Fair Division for Countably Many Participants*, J. Math. Anal. Appl., 109, 83-89 (1985)

[D3] Legut J. : *A Game of Fair Division with a Continuum of Players.* Colloquium Mathematicum, vol LIII, 323-331 (1987)

[D4] Legut J.: *A Game of Fair Division in Normal Form*, Colloquium Mathematicum, vol LVI, 179-184 (1988)

[D5] Legut J. and Wilczyński M.: *Optimal partitioning of a Measurable Space into Countably Many Sets,* Probability Theory and Related Fields, 86, 551-558 (1990)

[D6] Legut J.: "On Totally Balanced Games Arising from Cooperation in Fair Division", *Games and Economic Behavior*, 2, 47-60 (1990)

[D7] Legut J., Potters J.A.M. and Tijs S.H.: *Economies with Land - A Game Theoretical Approach,* Games Econom. Behav. vol. 6, Issue 3, 416-430 (1994)

[D8] Legut J., Potters J.A.M. and Tijs S.H. (1995): *A transfer Property of Equilibrium Payoffs in Economies with Land* , Games Econom. Behav. vol. 10, Issue 2, 355-375 (1995)

[D9] Dall'Aglio M., Legut J., Wilczyński M.: *On Finding Optimal Partitions of a Measurable Space*, Mathematica Applicanda, vol. 43(2), 193-206 (2015)

[D10] Legut J.: *Optimal Fair Division for Measures with Piecewise Linear density Functions,* International Game Theory Review, vol. 19, No. 2, 175009, (2017)

[D11] Legut J.: *On a method of obtaining an approximate solution of an exact fair division problem,* Mathematica Applicanda, vol. 46 (2), 245-256 (2018)

[D12] Legut J. and Wilczyński M.: *How to obtain maximal and minimal subranges of two-dimensional vector measures.* Tatra Mt. Math. Publ. 74 85–90 (2019)

Pierwsze trzy prace [D1,D2,D3] dotyczą wykorzystania wyników teorii gier w problematyce sprawiedliwego podziału i stanowiły podstawę mojej rozprawy doktorskiej.
W pracy [D1] wprowadziłem model nowej klasy gier rynkowych, w których gracze dokonują wymiany towarów opisanych przy pomocy zbiorów mierzalnych pewnej przestrzeni, a funkcje użyteczności są reprezentowane przez bezatomowe miary probabilistyczne. Następnie pokazałem, że nowa klasa zawiera gry całkowicie zrównoważone (por. [52])
i pokrywa się z klasą gier rynkowych zdefiniowanych wcześniej przez Shapley'a i Shubika [55].

Praca [D2] oraz [D5] została omówiona w Rozdziale 4.3.2 w komentarzu do Twierdzenia 4.7.

W pracy [D3] zaproponowałem model sprawiedliwego podziału, w którym uczestniczy nieskończona liczba graczy reprezentowanych przez odcinek jednostkowy $[0, 1]$. Następnie pokazałem, że w tym modelu istnieją podziały, które są "$\epsilon-$sprawiedliwe".

Praca [D4] dotyczy reprezentacji gier sprawiedliwego podziału w postaci strategicznej. Głównym wynikiem tej pracy jest dowód istnienia punktu równowagi w sensie Nasha dla czystych strategii. Ten punkt równowagi odpowiada optymalnemu podziałowi przestrzeni mierzalnej.

Publikacje [D1,D2,D3,D4,D5] były cytowane w przeglądowej książce pt. "Fair division-from cake-cutting to dispute resolution" napisanej przez znanych specjalistów teorii sprawiedliwego podziału - Bramsa i Taylora [8].

W pracy [D6] zaproponowałem metodę badania wtórnego podziału obiektu $\mathcal{X}$ z wykorzystaniem teorii gier kooperacyjnych. W tej metodzie gracze tworzą koalicje, aby poprawić początkowy podział, a następnie definiowana jest pewna gra kooperacyjna. Okazało się, że takie gry są całkowicie zrównoważone, a więc posiadają niepusty rdzeń. Pokazałem, jak wyznaczyć imputacje należące do tego rdzenia. Zaprezentowałem również charakterystykę oraz pewne własności takich gier. Ten wynik był później omawiany w literaturze sprawiedliwego podziału oraz teorii gier kooperacyjnych (por. [13, 14, 18, 17]).

W pracy [D7] została zdefiniowana gra kooperacyjna v_E związana z ekonomią podziału działki E (ekonomia w sensie Debreu, w której działka jest jedynym towarem). Praca zawiera analizę gier TU typu v_E oraz charakterystykę zbioru wypłat pozostających w równowadze opisanych, jako podzbiór rdzenia gry v_E. Autorzy udowodnili, że wypłaty tworzące punkt równowagi mogą być rozszerzone do monotonicznych procedur w sensie Sprumonta. Wyniki tej pracy były cytowane w innych artykułach (por. [20, 21, 46, 50, 51]).

Praca [D8] dotyczy analizy ekonomii wymiany w sensie Debreu z jednym tylko towarem - działką. Autorzy badają gry NTU powiązane z tym rodzajem ekonomii. Głównym wynikiem tej pracy jest pokazanie, że zbiór wypłat stanowiących punkt równowagi w modelu NTU jest związany ze zbiorem wypłat stanowiących punkt równowagi w modelu TU rozważanym w pracy [D6] przy pomocy tzw. b-transferu - koncepcji wprowadzonej przez Shapley'a [53].

Prace [D9] i [D10] zostały omówione we wstępnej części Rozdziału 4.3.5. Dotyczą one metod konstrukcji optymalnego podziału przestrzeni mierzalnej według miar zdefiniowanych przy pomocy gęstości opisanych przez funkcje proste ([D9]) oraz funkcje kawałkami liniowe ([D10]).

W pracy [D11] zaproponowałem algorytm wyznaczania przybliżonego rozwiązania problemu dokładnie sprawiedliwego podziału odcinka jednostkowego $[0, 1]$. Taki podział jest jednocześnie proporcjonalny, wolny od zazdrości oraz równomierny (Definicja 4.1). Ponadto przedstawiłem przykład ilustrujący ten algorytm dla trzech graczy.

Praca [D12] dotyczy pewnych własności obrazu dwuwymiarowej bezatomowej miary wektorowej. Niech $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ będzie przestrzenią mierzalną z dwuwymiarową bezatomową miarą wektorową $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$. Zdefiniujmy zbiór $R(Y) = \{\vec{\mu}(Z) : Z \in \mathcal{B}, Z \subseteq Y\}$. Dla danego $p \in \vec{\mu}(\mathcal{B})$ rozważmy mierzalną rodzinę zbiorów $\mathcal{B}_p = \{Z \in \mathcal{F} : \vec{\mu}(Z) = p\}$. Dai i Feinberg [15] udowodnili istnienie maksymalnego podzbioru $Z^* \in \mathcal{B}_p$ posiadającego jednocześnie maksymalny obraz $R(Z^*)$. Pokazali również istnienie minimalnego podzbioru $M^* \in \mathcal{B}_p$ posiadającego minimalny obraz $R(M^*)$. W pracy [D12] pokazaliśmy metodę konstrukcji maksymalnego oraz minimalnego obrazu. W ten sposób pokazaliśmy również prostszy dowód wyników uzyskanych przez przez Dai i Feinberga [15].

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową lub artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

Na początku mojej aktywności naukowej w roku 1988 (lipiec) wygłosiłem wykład na temat teorii sprawiedliwego podziału z prezentacją własnych wyników naukowych na zaproszenie Wydziału Matematyki uniwersytetu Georgia Instutute of Technology z Atlanty (USA).

Na początku lat dziewięćdziesiątych nawiązałem współpracę naukową z Wydziałem Matematyki Uniwersytetu Katolickiego w Nijmegen (Holandia), który wielokrotnie odwiedzałem. Owocem tej współpracy było opublikowanie dwóch artykułów naukowych na temat wykorzystania teorii sprawiedliwego podziału w ekonomii ([39, 40]). Uzyskane wyniki referowałem w roku 1991 na Międzynarodowej Konferencji z Teorii Gier oraz Ekonomii na uniwersytecie Stony Brook w Nowym Jorku.

W roku 1992 (lipiec) wygłosiłem wykład na Wydziale Ekonomii uniwersytetu w Tel Avivie na temat zastosowania teorii gier w problematyce sprawiedliwego podziału.

W roku 2013 (październik) nawiązałem współpracę z profesorem Marco Dall'Aglio z uniwersytetu LUISS Universita Guido Carli w Rzymie. W wyniku tej współpracy został opublikowany artykuł [22] dotyczący metod sprawiedliwego podziału.

W roku 2022 od 1 kwietnia do 30 czerwca odbyłem staż naukowy w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, którego opiekunem był prof. dr hab. Szymon Plewik. Celem tego stażu było nawiązanie współpracy naukowej w badaniach dotyczących własności obrazu bezatomowej miary wektorowej.

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

W czasie swojej kariery zawodowej realizowanej na Politechnice Wrocławskiej prowadziłem wykłady z wielu przedmiotów matematycznych, takich jak: algebra liniowa, analiza matematyczna, statystyka, rachunek prawdopodobieństwa, równania różniczkowe, analiza danych ankietowych.

Za moją działalność dydaktyczną otrzymałem następujące nagrody:

- Nagroda Dziekana Wydziału Podstawowych Problemów Techniki za osiągnięcia dydaktyczne - 1986 r.
- Nagroda Dyrektora Instytutu Matematyki za osiągnięcia dydaktyczne - 1989 r.
- Nagroda Rektora w uznaniu wyróżniającego wkładu w działalność uczelni - 2017

W latach 2016-2022 byłem promotorem 20 prac licencjackich oraz 9 prac magisterskich z matematyki. Część z tych prac dotyczyła tematyki moich badań naukowych. Były to następujące prace:
Prace licencjackie:

- Michał Krząstek - Zastosowanie teorii gier kooperacyjnych w ocenie siły przetargowej partii politycznych
- Bartosz Lewandowski - Zastosowanie teorii gier w sprawiedliwym podziale holdingu spółek
- Taras Kostiuk - Analiza strategii konkurencyjnych wejścia firm na rynek w oparciu o modele gier niekooperacyjnych
- Krystian Kasprzyk - Optymalny sprawiedliwy podział obiektów dwuwymiarowych
- Patrycja Niewęgłowska - Metoda sprawiedliwego podziału obiektów dwuwymiarowych z narzuconymi ograniczeniami i jej zastosowanie w praktyce
- Piotr Trzeciak - Wyznaczanie obrazu dwuwymiarowej miary wektorowej oraz jego zastosowania

Prace magisterskie:

- Krystian Kasprzyk - Minimaksowe reguły decyzyjne identyfikacji nieznanego rozkładu zmiennej losowej
- Sandra Mróz - Zastosowania gier kooperacyjnych sprawiedliwego podziału

Jeśli chodzi o działalność popularyzującą matematykę, to w roku 2018 brałem udział w komisji sprawdzającej prace z olimpiady matematycznej organizowanej dla szkół średnich.

Literatura

[1] Allaart, P. C.:*Minimax risk inequalities for the location-parameter classification problem*, Journal of Multivariate Analysis, 66, 255-269 (1998)

[2] Allaart, P. C.: *A sharp nonconvexity bound for partition ranges of vector measures with atoms*, J. Math. Anal. Appl. 235, 326-338 (1999)

[3] Y. Aumann, Y. Dombb, *The efficiency of fair division with connected pieces.* ACM Trans. Econ. Comput. 3 (4), Art. 23, 16 (2015)

[4] Aubin, J.P.: *Mathematical Methods of Game and Economic Theory,* North-Holland Publishing Company. (1980)

[5] Barbanel, J.: *On the geometry of cake division,* J. Math. Anal. Appl. 264, 639-656 (2001)

[6] M. Berliant, W. Thomson, K. Dunz, *On the fair division of a heterogeneous commodity.* J. Math. Econom. 21 (3) 201-216 (1992)

[7] Brams S. J. and Taylor A.D.: *An envy-free cake division protocol,* Am. Math. Mon. 102, 9-18 (1995)

[8] Brams S. J. and Taylor A.D.: Fair division-From cake-cutting to dispute resolution, Cambridge University Press, (1996)

[9] Brams S. J., Taylor A.D., Zwicker W. S.: *Old and new moving-knife schemes,* Math. Intellingencer 17, 30-35 (1995)

[10] Brams S. J., Taylor A.D., Zwicker W. S.: *A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem,* Proc. Amer. Math. Soc. 125, 547-554 (1997)

[11] K. Cechlárová, J. Doboš, E. Pillárová, *On the existence of equitable cake divisions.* Inform. Sci. 228, (2013) 239-245.

[12] G. Chéze, *Existence of a simple and equitable fair division: A short proof.* Math. Social Sci. 87 (2017) 92-93.

[13] Csóka, P., Herings, P.J.J., Kóczy, L.: *Stable allocations of risk,* Games Econom. Behav. 67, no. 1, 266-276 (2009)

[14] Csóka, P., Herings, P.J.J., Kóczy, L.: *Balancedness conditions for exact games,* Math. Methods Oper. Res. 74, 41-52 (2011)

[15] Dai, P., Feinberg, A.: *On maximal ranges of vwctor measures for subsets and purification of transition probabilities,* Proc. Amer. Math. Soc. 139, 4497-4511 (2011)

[16] Dall' Aglio M.: *The Dubins-Spanier optimization problem in fair division theory.* J. Comput. Appl. Math. 130, no. 1-2, 17-40 (2001)

[17] Dall'Aglio M. and Hill T,: *Maximin share and minimax envy in fair-division problems.* J. Math. Anal. Appl. 281 , no. 1, 346-361 (2003)

[18] Dall'Aglio, M., Branzei, R, Tijs, S.: *Cooperation in dividing the cake,* TOP 17, no. 2, 417-432. (2009)

[19] M. Dall' Aglio, F. Maccheroni, Disputed lands. Games and Econom. Behav. 66 (1) 57-77 (2009)

[20] Dall'Aglio M. and Di Luca: *Finding maxmin allocations in cooperative and competitive fair division,* Ann. Oper. Res. 223, 121–136 (2014)

[21] Dall'Aglio M. and Di Luca: *Bounds for α-Opimal Partitioning of a Measurable Space Based on Several Efficient Partitions,* J. Math. Anal. Appl. 425, no. 2, 854–863 (2015)

[22] Dall'Aglio M., Legut J., Wilczyński M.: *On Finding Optimal Partitions of a Measurable Space*, Mathematica Applicanda, vol. 43(2), 193-206 (2015)

[23] Dubins, L. and Spanier E.: *How to cut a cake fairy,* Am. Math. Mon. 68, 1-17 (1961)

[24] Demko, S. and Hill, T.: *Equitable Distribution of Indivisible Objects,* Mathematical Social Sciences 16, 145-158 (1988)

[25] Dvoretzky, A., Wald A. and Wolfowitz, J.: *Relations among certain ranges of vector measures,* Pacific J. Math. 1, 59-74 (1951)

[26] Elton, J. Hill, T. and Kertz, R.: (1986), *Optimal partitioning ineaqualities for non-atomic probability measures,* Trans. Amer. Math.Soc., 296, 703-725 (1986)

[27] Fink, A. M.: *A note on the fair division problem,* Math. Magazine, 37, 341-342 (1964)

[28] Hill, T. and Tong, Y.: *Optimal-partitioning ineaqualities in classification and multi hypotheses testing* Ann. Stat., 17, 1325-1334 (1989)

[29] Jóźwiak I. and Legut J.: *Decision Rule for an Exponential Reliability Function* , Microelectron. Reliab. vol. 31, 71-73 (1991)

[30] Jóźwiak I. and Legut J.: *Minimax decision rules for identifying an unknown distribution of a random variable,* Proceedings of 39th International Conference on Information Systems Architecture and Technology, ISAT 308-317 (2018)

[31] Knaster, B.: *Sur le probleme du partage pragmatique. de H. Steinhaus,* Ann. Soc. Polon. Math. 19, 228-230 (1946)

[32] Legut J.: *The Problem of Fair Division for Countably Many Participants* , J. Math. Anal. Appl., 109, 83-89 (1985)

[33] Legut J.: *Market games with a continuum of indivisible commodities.* Internat. J. Game Theory 15 no. 1, 1–7 (1986)

[34] Legut J.: *A game of fair division with continuum of players.* Colloq. Math. 53 , no. 2, 323–331 (1987)

[35] Legut J.: *Optimal Fair Division for Measures with Piecewise Linear density Functions,* International Game Theory Review, vol. 19, No. 2, 175009, (2017)

[36] Legut J.: *Connecting two points in the range of a vector measure*, Colloquium Mathematicum, vol. 153, No. 2, 163-167 (2018)

[37] Legut J.: *On a method of obtaining an approximate solution of an exact fair division problem,* Mathematica Applicanda, vol. 46 (2), 245-256 (2018)

[38] Legut, J., Wilczyński, M.: *Optimal partitioning of a measurable space into countably many sets,* Probab. Theory Related Fields 86, (1990), no. 4, 551-558 (1990)

[39] Legut, J.; Potters, J. A. M.; Tijs, S. H.: *Economies with land—a game theoretical approach.* Games Econom. Behav. no. 3 416–430 (1994)

[40] Legut, J.; Potters, J. A. M.; Tijs, S. H.: *A Transfer Property of Equilibrium Payoffs in Economies with Land* Games Econom. Behav. no. 10 335-375 (1995)

[41] Legut, J. and Wilczyński, M.: *How to obtain maximal and minimal subranges of two-dimensional vector measures,* Tatra Mt. Math. Publ. 74, 85-90 (2019)

[42] Lehmann, E. L., Joseph P. Romano. *Testing Statistical Hypotheses*, third edition. Springer Science+Business Media, Inc., New York. (1986)

[43] Lyapunov, A.: *Sur les fonctions-vecteurs completement additives,* Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR, 4, 465-478 (1940)

[44] Nicoló, A. Perea, A. and Roberti, P.: *Equal opportunity equivalence in land division.* J. Spanish Econom. Assoc. 3 (1-2) 133-142 (2012)

[45] Palmer, J.A., Relative Convexity, unpublished paper (2003)

[46] Reijnierse, H., Borm, P., Quant, M., Meertens, M.: *Processing games with restricted capacities* European J. Oper. Res. 202, no. 3, 773-780 (2010)

[47] Robertson, J.M. and Webb, W.A.: *Minimal number of cuts for fair division*, Ars Combin. 31, 191-197 (1991)

[48] Sagara, N.: *Equity and Efficiency in Measure Space with Nonadditive Preferences: The Problem of Cake Division.* Proceedings of the 23rd International Conference on Mathematical Methods in Economics, 338-343 (2005)

[49] Sagara, N.: *A characterization of α-maximin solutions of fair division problems,* Mathematical Social Sciences, vol 55, 273-280 (2008)

[50] Segal-Halevi, E., Nitzan, S., Hassidim, A. and Aumann, Y.: *Fair and square: Cake-cutting in two dimensions.* J. Math. Ecnom. 70, 1-28 (2017)

[51] Segal-Halevi, E. Sziklai, B. R.: *Resource-monotonicity and population-monotonicity in connected cake-cutting,* Math. Social Sci. 95 19-30 (2018)

[52] Shapley, L. S.: *On Balanced Sets and Cores*, Naval Res. Logist. Quart. 14, 453-460 (1967)

[53] Shapley, L. S.: *Utility comparison and the theory of games,* The Shapley value, 307-319, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 307-319 (1988)

[54] Shisha, O. and Cargo, G. T., *On comparable means*, Pacific J. Math. (3) 14, 1053-1058 (1964)

[55] Shapley, L.S., Shubik, M.: *On market games,* J. Economic Theory 1, 9-25 (1969)

[56] Steinahus, H.: *The problem of fair division,* Econometrica 16, 101-104 (1948)

[57] Steinahus, H.: *Sur la division pragmatique* Econometrica 17 (Suppl), 315-319 (1949)

[58] Steinahus, H.: *Mathematical Snapshots* Oxford University Press, Oxford, 65-72 (1960)

[59] W. Stromquist, *How to cut a cake fairly.* Am. Math. Month. 87, 8 640-644 (1980)

[60] W. Stromquist, W. and Woodall, D. R.: *Sets on which several measures agree*, J. Math. Anal. Appl. 108, 241-248 (1985)

[61] D. Weller, D.: *Fair division of a measurable space,* J. Math. Econom. 14, 5-17 (1985)

[62] Woodall, D.R. *Dividing a cake fairly,* J. Math. Anal. Appl. 78, 233-247 (1980)

PODPIS ZAUFANY
JERZY
LEGUT
14.11.2022 12:25:28 [GMT+1]
Dokument podpisany elektronicznie
podpisem zaufanym