Autoreferat

Andrzej Starosolski

30 października 2024

1 Formalności

- Autor - Andrzej Starosolski
- Posiadane stopnie i tytuły
  - Dyplom magistra matematyki - 1998 - Politechnika Śląska, praca *Pewne problemy teorii zbieżności (Zbieżnościowe warunki odpowiadające topologicznym aksjomatom oddzielania T0 i T1)*
  - Stopień doktora nauk matematycznych - 2003, Uniwersytet Burgundzki, Dijon, praca *Filtres fractals, contours et supercontours séquentiels* (nostryfikacja - 2004, Uniwersytet Śląski)
- Informacja o zatrudnieniu: od 1998r jestem zatrudniony na Wydziale Matematyki (obecnie pod nazwą Wydział Matematyki Stosowanej) Politechniki Śląskiej na stanowiskach: asystenta, starszego wykładowcy, adiunkta.
- Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni: Poza Politechniką Śląską
  - Na stałe współpracuję naukowo z Uniwersytetem Burgundzkim, gdzie m.in. odbyłem serię staży naukowych (w sumie ponad 10 miesięcy, załączone potwierdzenie z Uniwersytetu Burgundzkiego) i gdzie obroniłem doktorat. Rezultatem tej współpracy są także publikacje [9] i [H4] wspólne z Szymonem Doleckim.
  - Na stałe współpracuję z Uniwersytetem Śląskim czego rezultatem są publikacje [H3] i [R4] wspólne z Michałem Machurą.

Poniższa części punktu "Formalności" jest wspólna dla Autoreferatu i dla "Wykazu osiągnięć naukowych albo artystycznych (...)". Niemniej, ponieważ informacje te znajdują się w szablonie Autoreferatu na stronach Rady Doskonałości Naukowej, łączę je i tutaj.

- Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę
  - Osiągnięcia dydaktyczne
    - Wraz z Alicją Samulewicz napisałem podręcznik ze wstępu do matematyki *Podstawy matematyki i jak to się je* [R6]
    - Jestem współautorem artykułu *Dwa spojrzenia na nieskończoność* z zakresu dydaktyki i popularyzacji nauki [R5], praca wspólna z Alicją Samulewicz.
    - Prowadziłem wykłady na kierunku Matematyka z przedmiotów: logika, topologia, analiza funkcjonalna, wstęp do matematyki; ćwiczenia z powyższych, z analizy i z równań różniczkowych.
    - Dla studentów innych wydziałów prowadziłem wykłady i ćwiczenia z przedmiotów: matematyka, analiza, algebra, statystyka matematyczna.
    - Byłem promotorem kilkudziesięciu prac dyplomowych
    - Jestem autorem kilku programów przedmiotów obieralnych.
  - Osiągnięcia organizacyjne
    - Współorganizowałem cykliczną konferencję: *Letnia szkoła algebry i topologii*, Gliwice (II-2006, III- 2007)
    - Byłem współorganizatorem i kilka lat współopiekunem seminarium naukowego z topologii i teorii mnogości w Instytucie Matematyki Politechniki Śląskiej
    - Przez kilka lat byłem opiekunem koła naukowego studentów Wydziału Matematyki Politechniki Śląskiej
    - Kilkukrotnie byłem jurorem w konkursie matematycznym w Ostrawie – Vojtěch Jarník International Mathematical Competition
    - W zasadzie corocznie pełnię jakąś funkcje organizacyjną na Wydziale, często jest to audytor wewnętrzny lub opiekun roku czy rzecznik praw studenckich
  - Osiągnięcia z popularyzacji nauki

- * Wspomniany wyżej podręcznik [R5] i artykuł [R6]
- * Przeprowadziłem kilkadziesiąt wykładów dla uczniów szkół średnich na temat wybranych zagadnień matematyki współczesnej w ramach różnych Dni otwartych, Spotkań z matematyką, Maratonów matematycznych itp.

- Naukometria

  - index Hirscha 3 (Scopus 17.10.2024)

  - punktacja czasopism, w których opublikowane zostały artykuły przedstawione w *osiągnięciu* 2×JSL 200p.; 2×APAL 140p. (w tym jedna praca współautorska); 1×AML 140p. (współautorska)

2 Osiągnięcie - *Monotoniczne kontury ciągowe i ich zastosowania w badaniu ultrafiltrów na zbiorze liczb naturalnych*

W skład *osiągnięcia* wchodzą następujące publikacje:

H1 A. Starosolski; *P-hierarchy on $\beta\omega$*; J. Symb. Log. 2008, 73(4), 1202-1214,

H2 A. Starosolski; *Cascades, order, and ultrafilters*; Ann. Pure Appl. Logic 2014, 165(10), 1626-1638,

H3 M. Machura, A. Starosolski; *How high can Baumgartner's I-ultrafilters lie in the P-hierarchy?*; Arch. Math. Log. 2015, 54(5/6), 555-569,

H4 S. Dolecki, A. Starosolski; *Continuous extension of maps between sequential cascades*; Ann. Pure Appl. Logic 2021, 172, 1-18,

H5 A. Starosolski; *Rudin-Keisler ordering of P-points under $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$*; J. Symb. Log. 2021, 86(4), 1691-1705.

2.1 Wstęp

Głównymi obiektami moich matematycznych zainteresowań są monotoniczne kontury ciągowe i (ultra)filtry na zbiorze liczb naturalnych. Monotoniczne kontury ciągowe są pojęciem stosunkowo młodym, z kolei ultrafiltry na ω są klasycznym "poligonem doświadczalnym" teorii mnogości, z jednej strony stosunkowo dobrze przebadanym, z drugiej pozostaje w tym zakresie wiele białych plam i znanych pytań otwartych broniących się już od kilkudziesięciu

A. S.

lat a tematyka ta jest wciąż obecna w pracach takich autorów jak A. Blass, J. Brendle, N. Dobrinen, D. Raghavan, S. Shelah, S. Todorčević i wielu innych.

Monotoniczne kontury ciągowe zostały wprowadzone w pracy [8] jako narzędzie do badania przestrzeni ciągowych z punktu widzenia teorii zbieżności. W kolejnej pracy [9] udowodniono m.in. twierdzenie dotyczące ciągłego przedłużania funkcji zdefiniowanych na elementach ekstremalnych kaskady na pewną podkaskadę (wszystkie konieczne definicje w części 2.2 poniżej). Z tego twierdzenia korzystałem w wielu moich pracach. Potrzebując mocniejszej wersji jeszcze raz prześledziłem dowód zauważając, że jest błędny. Prawidłowy dowód został podany w pracy [H4] i stąd tę pracę, zaburzając kolejność chronologiczną, omawiam jako pierwszą. Monotoniczne kontury ciągowe okazały się skutecznym narzędziem w badaniu niektórych szczególnych typów (ultra)filtrów na zbiorze liczb naturalnych. W tym zakresie w składzie *osiągnięcia* prezentuję wyniki dotyczące P-hierarchii, ultrafiltrów porządkowych i najszerzej znanej klasy - P-punktów, a poza *osiągnięciem* przedstawiam wyniki dotyczące filtrów podciągowych. Złożony do publikacji aytykół pokazuje też zastosowania konturów w badaniu Level - ultrafiltrów.

Za najważniejsze wyniki mojej pracy uznałbym

- Przebadanie własności dziedzicznych kaskad o zgodnym konturze i dowód Twierdzenia 2.3.8 o przedłużaniu funkcji ciągłej z $\operatorname{ext} V$ na pewną pełną podkaskadę. [H4]

- Twierdzenie 2.7.3 o rosnącym ciągu P^+-rodzin wraz z wykorzystaniem go do dowodów twierdzeń zanurzeniowych różnych obiektów w zbiór P-punktów z porządkiem RK, przy założeniu $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, ze szczególnym uwzględnieniem zanużeń liczb $< \mathfrak{b}^+$ (tw. 2.7.9) i długiej prostej (tw. 2.7.11). [H5]

- Twierdzenie 2.5.9 o istnieniu kaskady generującej "podnoszący" porządek względem porządków generowanych przez pary kaskad których kontury zawierają się w ustalonym ultrafiltrze, wraz z dowodem (ZFC) (tw. 2.5.10) o pustości klasy $J^*_{\omega^\omega}$-ultrafiltrów. [H2]

- Zdefiniowanie i zbadanie własności P-hierarchii wraz z jej relacjami z $\mathcal{I}$-ultrafiltrami (w rozumieniu Baumgartnera) [H1, H3, R2, R4]. Do *osiągnięcia* wybrałem z nich wyłącznie prace [H1, H3] ponieważ prace te wyróżniają się, jak sądzę, ciekawszymi wynikami i wyższą trudnością dowodową.

2.2 Kaskady i ich kontury - podstawowe definicje

Ponieważ tematyka dotycząca ultrafiltrów należy do "wspólnego języka" teorii mnogości, nie powtarzam tu klasycznych definicji z tego zakresu. Z kolei monotoniczne kontury i kaskady ciągowe z pewnością, do tego wspólnego języka nie należą, poniżej łączę więc podstawowe informacje, konieczne do wygodnej lektury reszty autoreferatu.

Monotoniczne kontury ciągowe są filtrami definiowanymi przy pomocy iteracji operacji granicy na bazie monotonicznych kaskad ciągowych. Zanim podam definicję pragnę zwrócić uwagę na nieustabilizowane i nazewnictwo i symbolikę operacji granicy co może powodować niedogodność lektury. Krótkie omówienie historyczne znajduje się w Appendixie pracy [H4], tu tylko zaznaczam, że operacja ta była w moich pracach oznaczana przez $\int_{\mathcal{F}} \mathcal{G}_s$, $\sum_{\mathcal{F}} \mathcal{G}_s$ i przez $\mathrm{Li}_{\mathcal{F}}\, \mathcal{G}_s$. W autoreferacie trzymam się ostatniego z tych oznaczeń. W autoreferacie ujednoliciłem też inne oznaczenia używane w moich pracach, tak więc terminologia i użyte w autoreferacie symbole mogą być niezgodne z używanymi w *osiągnięciu* i w pozostałych publikacjach.

Same kontury można zresztą wprowadzać także i bezpośrednio przez iterację operacji granicy (początkowo) na filtrze ciągowym, niemniej jakakolwiek głębsza analiza nieodwołalnie wymaga kontroli sposobu iteracji i tu monotoniczne kaskady ciągowe pojawiają się w naturalny sposób. Tego typu problemy i obiekty pojawiają się przy badaniu różnych iterowanych procesów w topologii, np. w pracy Franklin-Rajagopalan [11] przy badaniu topologii podciągowych.

Operacja granicy została wprowadzona przez H. J. Kowalsky'ego w [19] a wtórnie odkryta i rozpropagowana przez Z. Frolika w [12]. W pełnej ogólności operację *granicy(konturu/sumy/produktu)* definiujemy dla rodziny $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s : s \in S\}$ filtrów na ustalonym zbiorze X i dla filtra $\mathcal{G}$ na zbiorze S indeksów rodziny $\mathbb{F}$ jak następuje

$$\mathrm{Li}_{\mathcal{G}}\, \mathcal{F}_s := \bigcup\nolimits_{G \in \mathcal{G}} \bigcap\nolimits_{s \in G} \mathcal{F}_s,$$

W szczególnym wypadku, gdy $S = \omega$ a $\mathcal{G}$ jest filtrem koskończonym na ω,

$$\mathrm{Li}_{(n)}\, \mathcal{F}_n := \bigcup\nolimits_{k<\omega} \bigcap\nolimits_{n>k} \mathcal{F}_n.$$

Kaskadą nazywamy takie drzewo $(V, \sqsubset)$ z elementem minimalnym $\emptyset_V$, którego wszystkie gałęzie są skończone. Zbiór elementów maksymalnych oznaczamy $\max V$, a elementy ekstremalne to elementy maksymalne i element minimalny ($\mathrm{ext}\, V = \max V \cup \{\emptyset_V\}$). Kaskadę nazywamy *ciągową* jeśli dla każdego $v \in V \setminus \max V$ zbiór bezpośrednich następników (v^+ lub $V^+(v)$) jest mocy

$\aleph_0$. *Rząd* elementu v w kaskadzie V ($r(v)$ lub $r_V(v)$) definiujemy rekurencyjnie. Dla $v \in \max V$ przyjmujemy $r(v) = 0$ a jeśli mamy zdefiniowany $r(w)$ dla wszystkich $w \sqsupset v$ to przyjmujemy $r(v) = \sup\{r(w)+1; w \in v^+\}$. Kaskadę ciągową nazywamy *monotoniczną* jeśli dla każdego $v \in V \setminus \max V$ istnieje taki porządek na v^+, że rzędy kolejnych elementów stanowią ciąg niemalejący typu ω. Rzędem kaskady V nazywamy $r(V) = r(\emptyset_V)$. Dla monotonicznej kaskady ciągowej ustalamy (bez oznaczania) taki porządek i przez v_n oznaczamy n-ty element v^+ (dla $v \in V \setminus \max V$). Zauważmy, że dla każdej monotonicznej kaskady ciągowej V, dla każdego jej elementu v zbiór $v^\uparrow = \{w \in V : v \sqsubseteq w\}$ ($v^{\uparrow V}$ lub $V(v)$ jeśli chcemy zaznaczyć, że rozpatrujemy $v^\uparrow$ względem kaskady V) stanowi (przy zachowaniu porządku) monotoniczną kaskadę ciągową.

Dla uproszczenia zapisu stosujemy konwencję utożsamiającą filtr na podzbiorze z filtrem przez niego generowanym na całym zbiorze.

Kontur $\int V$ monotonicznej kaskady ciągowej V (*monotoniczny kontur ciągowy*) definiujmy rekurencyjnie, jako filtr na $\max V$. Jeśli $r(v) = 0$ to $\int v^\uparrow$ jest ultrafiltrem głównym generowanym przez $\{v\}$ na $\max V$. Jeśli mamy zdefiniowane $\int v_n^\uparrow$ dla wszystkich $v_n \in v^+$, to $\int v^\uparrow = \mathrm{Li}_{(n)} \int v_n^\uparrow$. Ponieważ $\emptyset_V^\uparrow = V$ to $\int V = \int \emptyset_V^\uparrow$.

Ponieważ $\max V$ dla monotonicznej kaskady ciągowej rzędu niezerowego jest zbiorem nieskończonym przeliczalnym, to traktujemy go zwykle jako (podzbiór zbioru) ω.

2.3 Praca H4 - Ciągłe rozszerzenia odwzorowań pomiędzy kaskadami ciągowymi

To praca wspólna z Szymonem Doleckim. Wkładem Prof. Doleckiego było przełożenie pracy z mojego bardzo technicznego sposobu prezentacji do postaci obecnej, Prof. Dolecki odpowiadał też za stronę formalno-językową, dodał Appendix i Rozdział 4 o interpretacji w przestrzeni Čecha-Stona. Cała reszta, w szczególności: zauważenie luki w pracy [9], przeprowadzenie prawidłowego dowodu i pogłębione badania w zakresie pracy, jest moim wkładem. (Załączone oświadczenie Prof. Doleckiego)

Głównym zadaniem pracy [H4] było prawidłowe udowodnienie i wzmocnienie Twierdzenia 3.3. z pracy [9], co osiągnięto w Twierdzeniu 7.2. W tym celu rozwinęliśmy metody pozwalające badać dziedziczne własności kaskad, których kontury (lub ich obrazy) są zgodne (t.j. łącznie stanowią rodzinę scentrowaną). Dodatkowo pokazaliśmy, że w rozumieniu technicznym czy konceptualnym monotoniczny kontur ciągowy definiuje kaskadę, której jest konturem.

Pierwszym wynikiem pracy [H4] jest Twierdzenie o Alternatywie pozwalające m.in. przejść krok graniczny w badaniu dziedzicznych zachowań kaskad/konturów. Przypomnijmy:

Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą rodzinami scentrowanymi, jeśli $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ też jest rodziną scentrowaną, to mówimy, że $\mathcal{A}$ jest *zgodna* z $\mathcal{B}$ i piszemy $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$, a jeśli rodzina $\mathcal{B}$ jest jednoelementowa, tzn. $\mathcal{B} = \{B\}$ wówczas upraszczamy zapis do $\mathcal{A}\#B$.

Definicja 2.3.1. *Zbiór $A \subset \omega \times \omega$ nazywamy* transwersalnym *jeśli A jest nieskończony a zbiory $\{l : (n,l) \in A\}$ i $\{m : (m,k) \in A\}$ są co najwyżej jednoelementowe dla każdego $n, k < \omega$.*

Twierdzenie 2.3.2 (H4, Theorem 3.1). *Niech $(\mathcal{F}_n)_n$ i $(\mathcal{G}_k)_k$ będą ciągami filtrów na zbiorze X i niech*

$$\mathcal{F} := \mathrm{Li}_{(n)}\, \mathcal{F}_n \text{ i } \mathcal{G} := \mathrm{Li}_{(k)}\, \mathcal{G}_k.$$

Jeśli $\mathcal{F}\#\mathcal{G}$, wtedy zachodzi przynajmniej jeden z poniższych warunków

A.1. $\mathcal{F}_n\#\mathcal{G}_k$ dla transwersalnego zbioru par (n,k),

A.2. $\mathcal{F}\#\mathcal{G}_k$ dla nieskończenie wielu k,

A.3. $\mathcal{F}_n\#\mathcal{G}$ dla nieskończenie wielu n.

Warto zaznaczyć, że nie jest to alternatywa rozłączna

Propozycja 2.3.3 (H4, Proposition 3.5). *Niech $\emptyset \neq J \subset \{1,2,3\}$, wtedy istnieją takie ciągi filtrów $(\mathcal{F}_n)_n$ i $(\mathcal{G}_k)_k$, że $\mathcal{F}\#\mathcal{G}$ dla $\mathcal{F} = \mathrm{Li}_{(n)}\, \mathcal{F}_n$, $\mathcal{G} = \mathrm{Li}_{(k)}\, \mathcal{G}_k$, i że warunek (A.j) zachodzi dla $j \in J$ i nie zachodzi dla $j \notin J$.*

Krokami pośrednimi w dowodzie Twierdzenia 2.3.8 są poniższe twierdzenia 2.3.6, 2.3.7 opisujące zachowanie kaskad, których obrazy konturów są zgodne. Twierdzenia poprzedzam definicją i lematem umożliwiającym jej wprowadzenie.

Lemat 2.3.4 (H4, Lemma 5.1). *Niech V będzie monotoniczną kaskadą ciągową i niech S będzie takim zbiorem, że $\int V\#S$. Wówczas istnieje S_∞ - największy z podzbiorów S, taki że*

1) $S_\infty\#\int V$;

2) $\{v : \exists s \in S_\infty, v \sqsubseteq s\}$ jest monotoniczną kaskadą ciągową (z zachowaniem porządku kaskady V)

Definicja 2.3.5. *Kaskadę $\{v : \exists s \in S_\infty, v \sqsubseteq s\}$ z poprzedniego lematu oznaczamy V_S.*

O. K.

Twierdzenie 2.3.6 (H4, Theorem 6.1). *Niech V, W będą monotonicznymi kaskadami ciągowymi, takimi że $\max V \subset X$ i $\max W \subset Y$ i niech $\varphi : X \to Z, \psi : Y \to Z$. Jeśli*

$$\varphi(\int V)\#\psi(\int W), \tag{1}$$

to istnieją $R\# \int V$ i $S\# \int W$, takie że dla każdego $v \in V_R$ istnieje $w \in W_S$ dla którego

$$\varphi\left(\int V_R(v)\right)\#\psi\left(\int W_S(w)\right), \tag{2}$$

i dla każdego $w \in W_S$ istnieje $v \in V_R$ takie że zachodzi (2).

Gdy w powyższym twierdzeniu wzmocnimy założenia - funkcja Ψ jest identycznością a obraz konturu V jest większy od konturu W, wówczas istnieją zbiory R, S, dla których wybór w dla v (z tezy poprzedniego twierdzenia) jest jednoznaczny.

Twierdzenie 2.3.7 (H4, Theorem 6.4). *Niech V, W będą monotonicznymi kaskadami ciągowymi i niech $\varphi : \max V \to \max W$ będzie takie że $\varphi(\int V) \supset \int W$. Wtedy istnieje $T\# \int V$ takie, że dla każdego $v \in V_T$ istnieje dokładnie jedno $w(v)$ dla którego*

$$\varphi(\int V_T(v))\# \int W(w(v)).$$

Następnie dostajemy twierdzenie główne, w którym na kaskadach rozważamy największą topologię przy której ciąg bezpośrednich następników zbiega do poprzednika.

Twierdzenie 2.3.8 (H4, Theorem 7.2). *Jeśli $\varphi : \operatorname{ext} V \to \operatorname{ext} W$ jest ciągła, wtedy istnieje $U\# \int V$ i ciągłe odwzorowanie $f : V_U \to W$ takie że $f \restriction \operatorname{ext} V_U = \varphi \restriction \operatorname{ext} V_U$.*

Z Twierdzenia 2.3.8 dostajemy wnioski dotyczące zależności pomiędzy rzędem konturu a teoriomnogościowym zawieraniem konturów (przez obraz) i pewnego rodzaju jednoznaczności kaskad generujących konkretny kontur.

Wniosek 2.3.9 (H4, Corollary 7.4). *Jeśli V, W są monotonicznymi kaskadami ciągowymi, dla których $\int V = \int W$, to $r(V) = r(W)$.*

Wniosek 2.3.10 (H4, Corollary 7.5). *Jeśli $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ są monotonicznymi konturami ciągowymi, takimi że $r(\mathcal{G}) > r(\mathcal{F})$, to $f(\mathcal{F})\mathrm{ot} \supseteq \mathcal{G}$ dla każdego odwzorowania f.*

Do ostatniego z wniosków z Twierdzenia 2.3.8 potrzebujemy jeszcze definicji

Definicja 2.3.11. *Podkaskada W kaskady V jest* prawie pełna *jeśli $\emptyset_W := \emptyset_V$ i $W^+(v)$ jest koskończonym podzbiorem $V^+(v)$ dla każdego $v \in W$.*

Definicja 2.3.12. *Niech V, T będą monotonicznymi kaskadami ciągowymi. Mówimy że T jest* lokalnie skończoną partycją *V (i oznaczamy, $T \rhd V$) jeśli istnieje prawie pełna podkaskada U kaskady V i suriekcja skończenie-do-jednego $f : T \to U$ taka, że*

$$f^{-1}(\emptyset_V) = \{\emptyset_T\}, \tag{3}$$

$$f\left[T^+\left[f^-(v)\right]\right] = V^+(v) \text{ jeśli } v \in U \setminus \max V, \tag{4}$$

$$f \restriction \max T \text{jest identycznością.} \tag{5}$$

Propozycja 2.3.13 (H4, Proposition 7.5)**.** *Jeśli $T \rhd V$, to $\int T = \int V$.*

Twierdzenie 2.3.14 (H4, Theorem 7.6)**.** *Jeśli V, W są monotonicznymi kaskadami ciągowymi, takimi że $\int V = \int W$, to istnieje monotoniczna kaskada ciągowa T taka, że $T \rhd V$ i $T \rhd W$.*

2.4 Praca H1 - P-hierarchia na $\beta\omega$

Pierwszym impulsem do powstania tej pracy było naturalne pytanie: czy/kiedy istnieją ultrafiltry wolne nie zawierające monotonicznego konturu ciągowego rzędu 2? Okazało się, że takie ultrafiltry to dokładnie P-punkty, a ponieważ ultrafiltr (na ω) jest wolny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera monotoniczny kontur ciągowy rzędu 1, pojawiło się, przez analogię, kolejne pytanie - o ultrafiltry nie zawierające konturu danego rzędu $\alpha < \omega_1$ a zawierające kontury wszystkich [1] rzędów niższych.

Definicja 2.4.1. *Mówimy, że ultrafiltr u (na ω) należy do klasy $\mathcal{P}_\alpha$ P-hirearchii (dla $\alpha < \omega_1$) jeśli nie istnieje monotoniczny kontur ciągowy rzędu α zawarty w u i dla każdego $\beta < \alpha$ istnieje monotoniczny kontur ciągowy rzędu β zawarty w u. Jeśli dla każdego $\alpha < \omega_1$ istnieje monotoniczny kontur ciągowy rzędu α zawarty w u, to mówimy, że $u \in \mathcal{P}_{\omega_1}$.*

Propozycja 2.4.2 (H1, Proposition 2.1)**.** *Ultrafiltr u (na ω) jest P-punktem wtedy i tylko wtedy gdy $U \in \mathcal{P}_2$.*

[1] Jeśli ultrafiltr zawiera kontur rzędu β to zawiera również kontury wszystkich rzędów niższych.

W dalszej części pracy po pierwsze przebadano wybrane własności P-hierarchii, wśród najważniejszych wymieniłbym

Twierdzenie 2.4.3 (H1, Theorem 2.3). *Jeśli* $u \in \mathcal{P}_\alpha$ *i* $f : \omega \to \omega$, *to* $f(u) \in \mathcal{P}_\beta$ *dla pewnego* $\beta \leq \alpha$.

Twierdzenie 2.4.4 (H1, Theorem 2.7). *Jeśli* $1 < \alpha < \omega_1$ *jest następnikową liczbą porządkową i* $u \in \mathcal{P}_\alpha$ *wtedy istnieje funkcja* $f : \omega \to \omega$ *taka, że* $f(u) \in \mathcal{P}_2$.

Twierdzenie 2.4.5 (H1, Theorem 2.5). *Niech* $(\alpha_n)_{n<\omega}$ *będzie niemalejącym ciągiem przeliczalnych liczb porządkowych, niech* $\alpha = \lim_{n<\omega}(\alpha_n)$, *niech* $1 < \beta < \omega_1$. *Jeśli* (u_n) *jest dyskretnym ciągiem ultrafiltrów takich, że* $u_n \in \mathcal{P}_{\alpha_n}$ *i jeśli* $u \in \mathcal{P}_\beta$ *to* $\int_u u_n \in \mathcal{P}_{\alpha+(-1+\beta)}$. *(Gdzie* $-1+\beta$ *oznacza* β *jeśli* β *jest nieskończone a* $\beta - 1$ *jeśli* β *jest skończone.)*

Twierdzenie 2.4.6 (H1, Theorem 2.8). *Następujące warunki są równoważne:*

1) istnieje P-punkt;

2) klasy $\mathcal{P}_\alpha$ *są niepuste dla wszystkich przeliczalnych następnikowych* α

3) istnieje przeliczalna liczba następnikowa $\alpha > 1$ *taka, że klasa* $\mathcal{P}_\alpha$ *jest niepusta.*

Twierdzenie 2.4.7 (H1, Theorem 3.15). *Niech* $\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{P}_\alpha$, *wtedy* $\mathbb{P}$ *jest zamknięta ze względu na* $\mathbb{P}$*-sumy. (To znaczy, że* $\mathrm{Li}_u u_n \in \mathbb{P}$ *jeśli* $u \in \mathbb{P}$ *i* $u_n \in \mathbb{P}$ *dla* $n < \omega$.*)*

Twierdzenie 2.4.8 (H1, Theorem 3.13). *(*$MA_{\sigma-centr}$*) Istnieje* $u \in \mathcal{P}_3$ *nie będący postaci granicy* $\mathrm{Li}_u u_n$ *dla ultrafiltrów wolnych* u, u_n, $n < \omega$.

Kolejnym impulsem było porównanie P-hierarchii do hierarchii ultrafiltrów porządkowych zdefiniowanej przez Baumgartnera w pracy [1]. Niech $\mathcal{I}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X, zawierającą wszystkie zbiory skończone i zamkniętą na podzbiory, wówczas ultrafiltr u na ω jest $\mathcal{I}$-ultrafiltrem jeśli dla każdej funkcji $f : \omega \to X$ istnieje $U \in u$ takie że $f[U] \in I$. Jeśli $X = \omega_1$ a za rodzinę $\mathcal{I}$ przyjmiemy rodzinę zbiorów o typie porządkowym mniejszym niż α to dostajemy tak zwane J_α-ultrafiltry. (Właściwe) ultrafiltry porządkowe - J^*_α-ultrafiltry to takie J_α-ultrafiltry, które nie są J_β-ultrafiltrami dla żadnego $\beta < \alpha$. Ponieważ Baumgartner pokazał, że jeśli α nie jest liczbą niedekomponowalną (czyli nie jest postaci ω^β) to klasa J^*_α-ultrafiltrów jest pusta, to de facto otrzymujemy hierarchię ultrafiltrów porządkowych należących do klas $J^*_{\omega^\alpha}$ dla przeliczalnych liczb porządkowych α.

Okazało się, że dla ultrafiltrów porządkowych Baumgartner w [1] uzyskał twierdzenia analogiczne do Propozycji 2.4.2 i Twierdzeń 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6 i 2.4.7, z tym, że dla Twierdzeń 2.4.4 i 2.4.6 w trochę słabszej postaci. Narzuciło się więc kolejne pytanie o rozróżnienie i porównanie tych hierarchii. W tym zakresie, częściowo przy pomocy ultrafiltrów zbudowanych przez C. Laflamme'a w pracy [21] udało się pokazać, że:

Twierdzenie 2.4.9 (H1, Theorem 3.8). *Jeśli istnieją P-punkty, to* $P_\alpha \cap J^*_{\omega^\alpha} \neq \emptyset$ *dla każdej przeliczalnej następnikowej* α. [2]

Niewysłowiona w [H1] jako twierdzenie a z obecnej perspektywy sądzę, że ważna jest następująca własność pokazana w dowodach twierdzeń [H1, Theorem 3.12] i [H1, Theorem 3.13]

Twierdzenie 2.4.10 (H1). *(*$MA_{\sigma-centr}$*)* [5] $J^*_{\omega^\omega+1} \cap \mathcal{P}_\omega \neq \emptyset$*; zachodzi również* $J^*_{\omega^\omega+1} \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

Twierdzenie 2.4.11 (H1, Theorem 3.9). *(*$MA_{\sigma-centr}$*)* [3] *dla każdej przeliczalnej następnikowej liczby* $\alpha > 2$ *zachodzi:* $\mathcal{P}_\alpha \neq J^*_{\omega^\alpha}$ *i* $\mathcal{P}_\omega \neq J^*_{\omega^\omega}$.

Na własności te watro spojrzeć przez pryzmat Twierdzenia 2.4.9 gdyż wspólnie pokazują jak bardzo różne indeksy ze względu na klasy P-hierarchii i ultrafiltów porządkowych mogą przyjmować konkretne ultrafiltry.

2.5 Praca H2 - Kaskady, porządek i ultrafiltry

Baumgartner w swojej pracy [1] definiując ultrafiltry porządkowe zwrócił uwagę, że następujące pytanie pozostaje bez odpowiedzi nawet przy założeniu CH lub MA

Pytanie 2.5.1. *[1] Czy dla liczb granicznych* α *istnieją* $J^*_{\omega^\alpha}$ *ultrafiltry?*

Niech u, v będą ultrafiltrami na ω, przypomnijmy, że $v <_\infty u$ jeśli istnieje funkcja $f : \omega \to \omega$ taka, że $f(u) = v$ i że f nie jest ani skończenie-do-jednego ani stała na żadnym zbiorze $U \in u$. Laflamme udowodnił, że jeśli ultrafiltr u ma pod sobą nieskończony ciąg $<_\infty$- zstępujący, to u jest przynajmniej $J^*_{\omega^\omega+1}$ ultrafiltrem [21, Lemma 3.2]. Laflamme postawił także 2 pytania

Pytanie 2.5.2. *[21, Open Problem 1] A co z wpływem* $<_\infty$*-wstępujących ciągów poniżej* u*? Weźmy ultrafiltr* u *ze wstępującym* $<_\infty$*-ciągiem* $u >_{RK} \ldots >_\infty u_1 >_\infty u_0$ *pod sobą. Ustalmy odwzorowania* g_i *i* f_i *będące świadkami na to, że* $u >_{RK} u_i$ *i* $u_{i+1} >_\infty u_i$ *odpowiednio. Problem tak naprawdę leży w możliwych relacjach między* g_i *i* $f_i \circ g_{i+1}$ *nawet w zależności od elementów* u.

[2] W [H1] teza była sformułowana "Jest relatywnie niesprzeczne z ZFC ...", niemniej elementy wspólne są budowane przy pomocy iteracji operacji granicy względem P-punktu.

[3] Formalnie te twierdzenia były sformułowane inaczej (Jest relatywnie niesprzeczne z ZFC ...) a warunek ($MA_{\sigma-centr}$) jest rezultatem wykorzystania w dowodach ultrafiltrów Laflamme'a budowanych pod tym warunkiem

lN.

Pytanie 2.5.3. *[21, Open Problem 2] Czy istnieje ultrafiltr u z dowolnie długim skończonym $<_\infty$-ciągiem poniżej u ale bez nieskończonego? To wygląda na najbardziej obiecującą drogę do budowy $J^*_{\omega^\omega}$-ultrafiltra.*

Praca [H2] odpowiada częściowo na Pytanie 2.5.1 dowodząc (ZFC), że klasa $J^*_{\omega^\omega}$-ultrafiltrów jest pusta. Daje też pozytywną odpowiedź na Pytanie 2.5.2 i negatywną na Pytanie 2.5.3.

Podstawową ideą było wykorzystanie zależności pomiędzy zawieraniem przez ultrafiltr konturu danego skończonego rzędu a typami porządkowymi obrazów jego zbiorów na ω_1. Zależności te opisują propozycje z pracy H1 [H1, Proposition 3.3] i [H1, Proposition 3.6] które mówią, że

1) jeśli ultrafiltr zawiera kontur rzędu α, to istnieje taka funkcja $f : \omega \to \omega_1$, że typy porządkowe obrazów zbiorów z ultrafiltra są nie mniejsze niż ω^α,

2) jeśli dla $n < \omega$ i dla ultrafiltra u istnieje funkcja $f : \omega \to \omega_1$, taka, że $\mathrm{ot}\,(f[U_0]) \geq \omega^\omega$ dla pewnego $U_0 \in u$ a zarazem $\mathrm{ot}\,(f[U]) \geq \omega^n$ dla wszystkich $U \in u$, to ultrafiltr ten zawiera kontur rzędu n.

Własność 2 implikuje, że $J^*_{\omega^\omega}$-ultrafiltry zawierają kontury wszystkich skończonych rzędów. Wykorzystując własności konturów trzeba było zbudować ciąg "rozrastających się" kaskad tak, by graniczna kaskada definiowała taką funkcję $f : \omega \to \omega_1$, że typy porządkowe obrazów elementów z dowolnego ultrafiltra zawierającego kontury tych kaskad są niemniejsze niż ω^ω. Problem stanowiła kontrola "rozrostu" kaskad. Zauważmy, że kontur kaskady granicznej nie musi zawierać się w ultrafiltrze.

Definicja 2.5.4. *Dla liczby porządkowej α definiujemy* $\mathrm{indec}\,(\alpha)$ *jako największą niedekomponowalną liczbą porządkową $\leq \alpha$.* [4]

Definicja 2.5.5. *Dla monotonicznej kaskady ciągowej V oznaczmy przez f_V dowolną zachowującą porządek leksykograficzny funkcję $\max V \to \omega_1$, tzn. taką, że jeśli $v', v" \in \max V$, $v' \sqsupseteq v_n$, $v" \sqsupseteq v_m$, $n < m$, $v \in V$ to $f_V(v') < f_V(v")$. (Innymi słowy, porządek leksykograficzny rozumiemy jako porządek drzewa rozszerzony o porządki na zbiorach następników elementów nie maksymalnych).*

Definicja 2.5.6. *Niech V i W będą takimi monotonicznymi kaskadami ciągowymi, że $\max V \supset \max W$. Mówimy, że W podnosi porządek V i piszemy $W \Rrightarrow V$ jeśli $\mathrm{ot}\,(f_W(U)) \geq \mathrm{indec}\,(\mathrm{ot}\,(f_V(U)))$ dla każdego $U \subset \max W$.*

Przypomnijmy, że dla rodziny scentrowanej $\mathbb{A}$ symbol $\langle \mathbb{A} \rangle$ oznacza filtr dla którego $\mathbb{A}$ jest podbazą. Niech $R_{\alpha,V}$ oznacza $\{v \in V : r_V(v) = \alpha\}$.

[4] Z tw. Cantora o postaci normalnej taka liczba jest zdefiniowana jednoznacznie.

Definicja 2.5.7. *Niech u będzie filtrem a V, W takimi monotonicznymi kaskadami ciągowymi, że $\int V \subset u$ i $\int W \subset u$. Mówimy, że rząd α w kaskadzie V zgadza się z rzędem β w kaskadzie W ze względu na filtr u jeśli $\bigcup_{(v,w)\in R_{\alpha,V}\times R_{\beta,W}}(\tilde{V}_{v,w} \cap \tilde{W}_{v,w}) \in u$ przy dowolnym wyborze $\tilde{V}_{v,w} \in \int v^{\uparrow V}$ i $\tilde{W}_{v,w} \in \int w^{\uparrow W}$; relację tę oznaczamy $\alpha_V E_u \beta_W$.*

Ważnym narzędziem pomocniczym w dowodzie głównego twierdzenia pracy jest następująca propozycja

Propozycja 2.5.8 (H2, Propozycja 3.8). *Niech V i W będą monotonicznymi kaskadami ciągowymi, takimi że $\int V \# \int W$, oznaczmy $\mathcal{U} = \langle \int V \cup \int W \rangle$ Wówczas $1_V E_{\mathcal{U}} 1_W$ i $r(V)_V E_{\mathcal{U}} r(W)_W$.*

Głównym twierdzeniem pracy jest poniższe Twierdzenie 2.5.9 umożliwiające budowę i kontrolę "odpowiednio rosnącego" ciągu kaskad.

Twierdzenie 2.5.9 (H2, Twierdzenie 3.11). *Niech u będzie ultrafiltrem i niech V, W będą monotonicznymi kaskadami ciągowymi skończonego rzędu, takimi że $\int V \subset u$ i $\int W \subset u$. Wówczas istnieje taka monotoniczna kaskada ciągowa T rzędu nie mniejszego niż $\max\{r(V), r(W)\}$ i nie większego niż $r(V) + r(W) - 1$, że $\int T \subset u$, $T \Rrightarrow V$ i $T \Rrightarrow W$.*

Dowód powyższego twierdzenia jest de facto odpowiedzią na Problem 2.5.2 - ponieważ pokazuje związki pomiędzy g_i a $f_i \circ g_{i+1}$ (oznaczenia z Pytania 2.5.2), ze względu na naturalną, opisaną poniżej, relację kaskad skończonego rzędu i skończonych ciągów $<_\infty$-rosnących.

Niech u będzie ultrafiltrem, przypuśćmy, że istnieje taki ciąg $(u_1, \dots u_n)$ wolnych ultrafiltrów, że $u = u_0 >_\infty u_1 >_\infty \dots >_\infty u_n$. Weźmy też ciąg funkcji - $f_m : \omega \to \omega$ - świadków, że $u_{m-1} >_\infty u_m$.

Zbudujemy monotoniczną kaskadę ciągową V korespondującą, ze względu na pewne $U \in u$, z powyższym ciągiem. W tym celu budujemy ciąg kaskad $(W^i)_{i \leq n}$. Weźmy monotoniczną kaskadę ciągową W^1 rzędu 1 i oznaczmy elementy $\max W^1$ liczbami naturalnymi poprzez jakąkolwiek bijekcję. Oczywiście $W \in u_n$ dla $W \in \int W^1$. Weźmy $W^2 = W^1 \cup \bigcup_{i \in \max W^1, \mathrm{card}\,(f_n^{-1}(i))=\infty} f_n^{-1}(i)$ [5] uporządkowną przez, rozszerzony przez przechodniość, następujący przedporządek: jeśli $w', w'' \in W^1$ to $w' \sqsubseteq_{W^2} w''$ wtedy i tylko wtedy gdy $w' \sqsubseteq_{W^1} w''$; jeśli $w' \in \max W^1$ i $w'' \in \max W^2$ to $w' \sqsubseteq_{W^2} w''$ wtedy i tylko wtedy gdy $f_2(w'') = w'$. Oczywiście $W \in u_{n-1}$ dla każdego $W \in \int W^2$. Kontynuujemy tę procedurę do otrzymania W^n. Weźmy zbiór wszystkich gałęzi W^n o długości

[5] Ponieważ formalnie poziomy kaskady muszą być rozłączne możemy założyć, że dziedzina f_1 i przeciwdziedziny f_m są podzbiorami parami rozłącznych kopii ω.

O.K.

n i niech S będzie zbiorem elementów maksymalnych tych gałęzi, zauważmy, że $S \in u$. Teraz wystarczy przyjąć $V = W^n_S$.

Weźmy teraz V, taką monotoniczną kaskadę ciągową skończonego rzędu, że $\int V \subset u$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że wszystkie gałęzie V mają długość n. Dla każdego $v \in V$ niech $\hat{v}$ będzie dowolnym elementem z $\max v^{\uparrow}$. Rozważmy funkcje $f_i : \omega \to \omega$ takie, że $f_i(w) = \hat{v}$ dla każdego $w \in \max v^{\uparrow}$ gdzie $r(v) = i$. Więc $u >_\infty f_1(u) >_\infty f_2(u) >_\infty \ldots >_\infty f_n(u)$, (detaliczny opis w pracy [R2]).

Ostatnie z twierdzeń pracy [H2] dowodzi (ZFC) pustości klasy $J^*_{\omega^\omega}$ ultrafiltrów (częściowa odpowiedź na Problem 2.5.1) zarazem pokazując (dowód), poprzez relacją kaskada-ciąg $<_\infty$-wstępujący, że jeśli pod ultrafiltrem jest dowolnej długości skończony ciąg $<_\infty$ wstępujący to jest i taki ciąg nieskończony, dając odpowiedź na Pytanie 2.5.3.

Twierdzenie 2.5.10 (H2, Twierdzenie 3.14). *(ZFC) Klasa $J^*_{\omega^\omega}$-ultrafiltrów jest pusta.*

2.6 Praca H3 - Jak wysoko w P-hierarchii mogą leżeć Baumgartnerowskie $\mathcal{I}$-ultrafiltry?

Praca wspólna z Michałem Machurą. Dr Machura był inicjatorem tej pracy, jego pomysłem była teza głównego twierdzenia [H3, Theorem 3.1]. Dowód powstał w długiej dyskusji, przy czym pomysł i dowód kombinatorycznego jądra dowodu twierdzenia [H3, Theorem 3.1] to jest propozycji [H3, Proposition 3.2] był mój. Pozostałe własności, w tym opis klasy ω_1 były moją zasługą, z kolei dr Machura odpowiadał też za za stronę techniczno-językową i sposób prezentacji wyników. (Załączone oświadczenie doktora Machury.)

Praca inspirowana twierdzeniem J. Flaškovej (Blobner) z jej doktoratu [10] pokazującym, że przy CH dla każdego gęstego P-ideału $\mathcal{I}$, zawierającego wszystkie zbiory jednoelementowe, istnieją $\mathcal{I}$-ultrafiltry, w rozumieniu Baumgartnera (str. 10), nie będące P-punktami. Główne twierdzenie naszej pracy pokazuje (zakładając CH), że dla każdego $\alpha \leq \omega_1$, dla każdego gęstego P-ideału $\mathcal{I}$, w klasie $\mathcal{P}_\alpha$ istnieją $\mathcal{I}$-ultrafiltry. Warto tu też wspomnieć, że w pracy [R4] (poza osiągnięciem) pokazano że dla każdego $\alpha \leq \omega_1$ klasa P_α zawiera thin-ultrafiltry (dla α przeliczalnego zakładając $MA_{\sigma-centr}$, dla $\alpha = \omega_1$ zakładając CH).

Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ na X nazywamy *gęstym* jeśli w każdy nieskończony podzbiór X zawiera nieskończony zbiór z $\mathcal{I}$. Ideał $\mathcal{I}$ nazywamy *P-ideałem*, jeśli dla każdego ciągu $(I_n)_{n<\omega}$ elementów z $\mathcal{I}$ istnieje taki $I \in \mathcal{I}$, że $I_n \subset^* I$ dla wszystkich n.

Kombinatorycznym jądrem dowodu twierdzenia głównego jest następująca Propozycja 2.6.2, którą poprzedzimy definicją.

Definicja 2.6.1. *Ustalmy monotoniczną kaskadę ciągową V, zbiór $F \# \int V$ i funkcję $f \in {}^{\omega}\omega$. Dla każdego $v \in V$ piszemy $U \in \mathbf{S}(v)$ jeśli*

1. $U \subset \max v^{\uparrow}$
2. $U \cap F \# \int v^{\uparrow}$
3. $\operatorname{card} f[U \cap F] = 1$.

Propozycja 2.6.2 (H3, Proposition 3.2). *Zachodzi jedna z możliwości:*

1. $\mathbf{S}(\emptyset_V) \neq \emptyset$
2. *istnieje antyłańcuch (ze względu na porządek kaskady) $\mathbb{A}$ taki że*
   (a) $\mathbf{S}(v) = \emptyset$ *dla wszystkich* $v \in \mathbb{A}$,
   (b) $(\bigcup\{\max w^{\uparrow} : w \in v^{+}, \mathbf{S}(w) \neq \emptyset\} \# \int v^{\uparrow}$ *dla wszystkich* $v \in \mathbb{A}$,
   (c) $(\bigcup\{\max v^{\uparrow} : v \in \mathbb{A}\} \# \int V$.

Twierdzenie 2.6.3 (H3, Twierdzenie 3.1). *(CH) Niech $\mathcal{I}$ będzie gęstym P-ideałem zawierającym wszystkie zbiory skończone i niech $\gamma \leq \omega_1$. Wówczas istnieje $\mathcal{I}$-ultrafiltr u należący do klasy $\mathcal{P}_{\gamma}$.*

W kolejnym twierdzeniu wzmacniamy tezę o istnienie pary RK nieporównywalnych $\mathcal{I}$-ultrafiltrów w każdej przeliczalnej klasie P-hierarchii.

Twierdzenie 2.6.4 (H3, Twierdzenie 4.1). *(CH) Niech $\mathcal{I}$ będzie gęstym P-ideałem zawierającym wszystkie zbiory skończone i niech $1 < \gamma < \omega_1$. Wówczas istnieją RK-nieporównywalne $\mathcal{I}$-ultrafiltry u, o należący do klasy $\mathcal{P}_{\gamma}$.*

2.7 Praca H5 - Porządek Rudin - Kisler na P-punktach przy założeniu $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$

M.E. Rudin swojej pracy [22] pokazała, że zakładając CH nad każdym P-punktem istnieje P-punkt ostro RK większy. Kilka lat później A. Blass [2] uzyskał ten sam wynik zakładając $MA_{\sigma-centr}$[6]. W tej samej pracy Blass pokazał też m.in. że ($MA_{\sigma-centr}$) każdy RK-rosnący ω-ciąg P-punktów jest

[6] Co prawda wyniki Blassa były sformułowane przy założeniu MA, ale, jak zauważył sam Blass w [3], dowody pozostawały prawdziwe przy $\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{centr}}$.

ograniczony (RK) od góry P-punktem i że ($MA_{\sigma-centr}$) istnieje zanurzenie porządkowe prostej rzeczywistej w P-punkty (z porządkiem RK).

W pracy [H5] pokazana jest metoda którą powyższe wyniki Blassa można uzyskać przy założeniu $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ [7], co więcej, dowody prowadzone tą metodą są kilkakroć krótsze i wykorzystują wyłącznie podstawowe narzędzia teoriomnogościowe (indukcja pozaskończona w miejsce $\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{centr}}$) a sama metoda umożliwia też pokazanie nowych twierdzeń.

W swojej pracy Blass pytał też [2, Question 4] o to jakie liczby porządkowe można zanurzyć w rodzinę P-punktów (z porządkiem RK). W [H5], zakładając $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, pokazano że każda liczba porządkowa mniejsza od $\mathfrak{c}^+$ jest tak zanurzalna. Pokazano także istnienie zanurzenia porządkowego długiej prostej w P-punkty.

Zdefiniowano także inwariant $\mathfrak{q}$ przy pomocy którego potencjalnie można osłabić założenia powyższych twierdzeń i pokazano warianty różnych inwariantów kardynalnych.

Mając Propozycję 2.4.2 wiemy, że ultrafiltr wolny jest P-punktem wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera monotonicznego konturu rzędu 2. Problem pracy indukcyjnej polega na tym, że podbaza filtra nie generująca filtra zawierającego monotoniczny kontur ciągowy rzędu 2 po dodaniu przeliczalnej ilości zbiorów może już generować filtr zawierający taki kontur. Stąd następująca definicja

Definicja 2.7.1. *Mówimy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest quasi-drobniejsza niż filtr $\mathcal{F}$ jeli istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{C}$ taka, że $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ jest rodziną scentrowaną i $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{C} \rangle \supset \mathcal{F}$.*

Przypomnijmy, że rodzinę nazywamy P^+-rodziną jeśli nie jest quasi-drobniejsza od żadnego monotonicznego konturu ciągowego rzędu 2. [8]

Ustalmy monotoniczną kaskadę ciągową rzędu 2, którą możemy widzieć jako nieskończoną partycję ω na zbiory nieskończone [9]. Kluczowym pomysłem dla dowodu Twierdzenia 2.7.3 jest, mówiąc nieformalnie, relacja pomiędzy funkcjami $\omega \to \omega$ a zbiorami z konturu ustalonej kaskady.

[7]Przypomnijmy, że $MA_{\sigma-centr}$ jest równoważne $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, i że istnieją modele w których $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$.

[8]Historycznie definicja została wprowadzona przez Mathiasa pod inną nazwą i w inny sposób

[9]Formalnie skończenie wiele z tych zbiorów może być jednoeomentowych - odpowiadających następnikom elementu minimalnego, które są elementami maksymalnymi. Niemniej ponieważ kontur kaskady pozostaje niezmienny po odrzuceniu tych elementów z kaskady, bez straty ogólności możemy przyjąć, że wszystkie gałęzie są długości 2, a to zapewnia, że wszystkie zbiory w partycji są nieskończone

Definicja 2.7.2. *Niech $\mathcal{W} = (W_n)_{n<\omega}$ będzie partycją ω na nieskończone podzbiory. Dla każdego $n < \omega$, niech $(w_k^n)_{k<\omega}$ będzie rosnącym ciągiem takim, że $W_n = \{w_k^n : k < \omega\}$. Dla każdego $f \in {}^\omega\omega$ i $m < \omega$, niech*

$$E_{\mathcal{W}}(f, m) = \{w_k^n : f(n) \leq k, m \leq n\} \tag{6}$$

Jeśli $F \in \int \mathcal{W}$, wtedy, z definicji, istnieje najmniejsze $n_F < \omega$ takie, że $W_n \setminus F$ jest skończone dla każdego $n \geq n_F$. Teraz, dla każdego $n \geq n_F$, istnieje najmniejsze $k_n < \omega$ takie, że $w_k^n \in F$ dla każdego $k \geq k_n$. Niech ff_F oznacza zbiór tych funkcji f dla których $n \geq n_F \implies f(n) = k_n$. Wtedy $E_{\mathcal{W}}(f, n_F)$ jest takie samo dla każdego $f \in \mathit{ff}_F$, to jest największy zbiór postaci (6) zawierający F. Oczywiście, $E_{\mathcal{W}}(f_F, n_F) \in \int \mathcal{W}$.

I na odwrót, dla każdej funkcji $f \in {}^\omega\omega$, definiujemy rodzinę $\mathcal{W}_f$ podzbiorów ω jak następuje: $F \in \mathcal{W}_f$ jeśli istnieje $n_F < \omega$ takie, że $F = E_{\mathcal{W}}(f_F, n_F)$.

Następnie wykorzystując powyższą zależność dowodzimy:

Twierdzenie 2.7.3 (H5, Theorem 2.5). *Niech $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha<\beta<\mathfrak{b}}$ będzie wstępującym ciągiem P^+-rodzin. Wówczas, $\bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{A}_\alpha$ jest P^+-rodziną.*

Jako zastosowanie pokazano serię twierdzeń o porządku RK na P-punktach. Pierwsze z twierdzeń jest co prawda bezpośrednią konsekwencją [23, Proposition 2.26] M. R. D. Matiasa połączonego z [2, Theorem 1] A. Blassa, ale zaprezentowany w [H5] dowód jest otwarciem wspólnej idei, leżącej u podstaw dowodów kilku z kolejnych twierdzeń. Ideą tą jest relacja pomiędzy dominowaniem funkcji skończenie-do-1a porządkiem RK ultrafiltrów definiowanych z użyciem tych funkcji na specjalnych drzewach, natomiast problemem kombinatorycznym i de facto główną trudnością każdego z dowodów jest pokazanie, że odpowiednie rodziny wchodzące w skład ciągu z Twierdzenia 2.7.3 są P^+-rodzinami.

Twierdzenie 2.7.4 (H5, Theorem 3.1). *($\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$) Jeśli p jest P-punktem, wtedy istniej P-punkt q, taki że q jest ostro RK większe od p.*

Twierdzenie 2.7.5 (H5, Theorem 3.4). *(CH) Jeśli p jest P-punktem, wtedy istnieje zbiór $\mathfrak{U}$ mocy $\mathfrak{c}$ Rudin-Keisler nieporównywalnych P-punktów, takich że $u >_{RK} p$ dla każdego $u \in \mathfrak{U}$.*

Twierdzenie 2.7.6 (H5, Theorem 3.5). *($\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$) Jeśli $(p_n)_{n<\omega}$ jest RK-rosnącym ciągiem P-punktów, wtedy istnieje P-punkt u taki że $u >_{RK} p_n$ dla wszystkich $n < \omega$.*

Z ostatnim twierdzeniem związanie jest pytanie o to jakie RK rosnące ciągi P-punktów mają ograniczenia górne w zbiorze P-punktów. D. Raghavan

1. M.

i J. L. Verner pokazali w [25] zakładając $\diamondsuit$, że istnieje nieograniczone od góry zanurzenie ω_1 w P-punkty.

W odpowiedzi na pytanie Blassa dotyczące zanurzeń liczb porządkowych w zbiór P-punktów z porządkiem RK dostajemy Twierdzenie 2.7.9 w dowodzie którego wykorzystano pomysł *rozrzuconych* rodzin niemalejących funkcji $\omega \to \omega$. [10]

Definicja 2.7.7. *Mówimy, że zbiór $A \subset {}^{\omega}\omega$ jest rozrzucony jeśli* $\lim_{n<\omega} \mid f(n) - g(n) \mid = \infty$ *dla każdej pary różnych funkcji $f, g \in A$.*

A kluczowy w ich wykorzystaniu jest następujący fakt:

Fakt 2.7.8 (H5, Fakt 3.9). *Dla każdego $\gamma < \mathfrak{b}^+$, istnieje ostro $<^*$-rosnący rozrzucony ciąg $\mathcal{F} = (f_\alpha)_{\alpha<\gamma} \subset {}^{\omega}\omega$ niemalejących funkcji.*

Twierdzenie 2.7.9 (H5, Theorem 3.10). *($\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$) Dla każdego $\gamma < \mathfrak{b}^+$, dla każdego P-punktu p istnieje RK-rosnący ciąg $\{p_\alpha : \alpha < \gamma\}$ P-punktów, taki że $p_0 = p$.*

Wykorzystując pomysł przestrzeni X z pracy Blassa [2] dostajemy wzmocnienie jego twierdzenia do postaci

Twierdzenie 2.7.10 (H5, Theorem 3.12). *($\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$) Istnieje zanurzenie porządkowe prostej rzeczywistej w P-punkty.*

a łącząc metody dowodu poprzedniego Twierdzenia 2.7.10 z ideami z dowodu Twierdzenia 2.7.4 i serią nowych pomysłów dostajemy zanurzenie długiej prostej w P-punkty. Przypomnijmy, że długą prostą nazywamy zbiór $\omega_1 \times (0, 1])$ z porządkiem leksykograficznym.

Twierdzenie 2.7.11 (H5, Theorem 3.14). *($\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$) Dla każdego P-punktu p istnieje zanurzenie porządkowe długiej prostej w P-punkty powyżej p.*

Zdefiniujmy liczbę kardynalną $\mathfrak{q}$

Definicja 2.7.12. *Liczbę kardynalną $\mathfrak{q}$ definiujemy jako najmniejszą moc rodziny $\mathcal{B}$, dla której istnieje rodzina $\mathcal{A}$ taka że $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle$ zawiera monotoniczny kontur ciągowy i $\langle \mathcal{A} \cup \mathcal{C} \rangle$ nie zawiera monotonicznego konturu ciągowego rzędu 2 dla żadnej przeliczalnej rodziny $\mathcal{C}$.*

Z twierdzeń 2.7.3 i [R2, Theorem 5.2] dostajemy

[10] Przy założeniu MA B. Kuzeljević i D. Raghavan w pracy [20] pokazali istnienie zanurzenia $\mathfrak{c}^+$ w P-punkty

Twierdzenie 2.7.13 (H5, Theorem 4.1). $\mathfrak{b} \leq \operatorname{cof} \mathfrak{q} \leq \mathfrak{q} \leq \mathfrak{d}$

Analiza dowodów pozwala zauważyć, że twierdzenia 2.7.4, 2.7.6, 2.7.9, 2.7.10 i 2.7.11, z wykorzystaniem zaprezentowanych dowodów, mogą być pokazane przy potencjalnie słabszym[11] założeniu $\mathfrak{q} = \mathfrak{c}$.

Co więcej niezmiennik $\mathfrak{q}$ jawi się jako przykład możliwego globalnego podejścia do wszystkich klasycznych małych liczb kardynalnych.

Definicja 2.7.14. *Niech $\mathbb{S}$ i $\mathbb{T}$ będą rodzinami (zbiorów, funkcji czy innych objektów) takich, że dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ istnieje $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ takie, że $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, definiujemy*

$$\mathfrak{dist}(\mathcal{S}, \mathbb{T}) = \min \{\operatorname{card}(\mathcal{B}) : \mathcal{S} \cup \mathcal{B} \in \mathbb{T}\}.$$

Niech $\mathfrak{D}(\mathbb{S}, \mathbb{T}) = \{\mathfrak{dist}(\mathcal{S}, \mathbb{T}) : \mathcal{S} \in \mathbb{S}\}$. Jako zbiór liczb kardynalnych, $\mathfrak{D}(\mathbb{S}, \mathbb{T})$ jest dobrze uporządkowany, więc możemy zdefiniować $\mathfrak{dist}_\beta(\mathbb{S}, \mathbb{T})$ jako element element $\mathfrak{D}(\mathbb{S}, \mathbb{T})$ o numerze porządkowym β. Co więcej, jeśli α jest liczbą graniczną, i liczby $\mathfrak{dist}_\beta(\mathbb{S}, \mathbb{T})$ są zdefiniowane dla wszystkich $\beta < \alpha$, wtedy $\mathfrak{dist}_{<\alpha}(\mathbb{S}, \mathbb{T}) = \sup_{\beta<\alpha} \mathfrak{dist}_\beta(\mathbb{S}, \mathbb{T})$.

W szczególności, jeśli $\mathbb{S}$ oznacza zbiór rodzin podzbiorów ω zgodnych z jakimkolwiek monotonicznym konturem ciągowym rzędu 2 a $\mathbb{T}$ zbiór rodzin zawierających podbazę monotonicznego konturu ciągowego rzędu 2, to definiujemy $\mathfrak{q}_\alpha = \mathfrak{dist}_\alpha(\mathbb{S}, \mathbb{T})$.

Propozycja 2.7.15 (H2, Proposition 5.2). *$\mathfrak{q}_0 = 0$, $\mathfrak{q}_1 = 1$, $\mathfrak{q}_2 = \aleph_0$, $\mathfrak{q}_3 = \mathfrak{q}$ i $\mathfrak{q}_\alpha \leq \mathfrak{d}$ dla wszystkich α.*

Jeśli $\mathbb{S}$ jest zbiorem rodzin mocno scentrowanych (na ω), a $\mathbb{T}$ jest zbiorem podbaz wolnych ultrafiltrów (na ω), wtedy dostajemy warianty $\mathfrak{u}$.

Fakt 2.7.16 (H5, Fakt 5.4). $\mathfrak{u}_0 = 0$, $\mathfrak{u}_1 = 1$, $\mathfrak{u}_2 \geq \aleph_1$.

Analiza dowodu Twierdzenia 2.7.5 pokazuje, że zachodzi ono przy założeniu ($\mathfrak{q} = \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{c}$).

3 Pozostałe publikacje po doktoracie

R1 A. Starosolski; *Fractalness of supercontours*; Topol. Proc. 2006, 30(1), 389-402,

R2 A. Starosolski; *Ordinal Ultrafilters vs. P-hierarchy*; Central Eur. J. Math. 2014, 12(1), 84-96 ,

[11]Nie wiadomo, czy istnieje model, w którym $\mathfrak{b} < \mathfrak{q}$

R3 A. Starosolski; *Fun with cascades* In: Monograph on the occasion of 100th birthday anniversary of Zygmunt Zahorski. Ed. by Roman Wituła, Damian Słota, Waldemar Hołubowski. Gliwice: Wydaw. Politechniki Śląskiej, 2015, 259-271

R4 M. Machura, A. Starosolski; *Thin ultrafilters and the P-hierarchy of ultrafilters*; Topol. Appl., 2020, 281, Art. Nr. 10720 5

R5 A. Samulewicz, A. Starosolski; *Dwa spojrzenia na nieskończoność*; MiNUT, 2020, 3, 52-60,

R6 A. Samulewicz, A. Starosolski; *Podstawy matematyki i jak to się je* Wydawnictwo Naukowe Politechniki Śląskiej; 2022, 151 stron,

R7 A. Starosolski; *Topological Approch to „nontopological" ultrafilters* - praca złożona do Topol. Appl.

Praca R1 Mówimy, że filtr $\mathcal{F}$ jest *fraktalny* jeśli $\langle \mathcal{F} \cup \{A\} \rangle$ jest RK równoważne $\mathcal{F}$ dla każdego $A \# \mathcal{F}$. *Superkonturem* nazywamy filtry postaci $\langle \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha \rangle$, gdzie $(C_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ jest $\subset$-rosnącym ciągiem monotonicznych konturów ciągowych, takich że $r(C_\alpha) = \alpha$. Istotność superkonturów jest związana ze zbieżnościowym opisem przestrzeni ciągowych. W pracy [R1] pokazuję między innymi, że

- (CH) Nad każdym superkonturem istnieje większy ($\subset$) superkontur, który jest ultrafiltrem [R1, Theorem 3.2]

- (CH) Istnieje $2^{\aleph_1}$ fraktalnych nie maksymalnych superkonturów na ω. [R1, Theorem 3.7] Niemaksymalność jest o tyle ważna, że ultrafiltry są fraktalne.

- ($2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$) Istnieje $2^{\aleph_1}$ niefraktalnych superkonturów. [R1, Corollary 4.5]

Praca R2 dotyczy P-hierarchii, za kluczowe jej wyniki uznałbym

- przebadanie szczególnych własności klas P-hierarchii skończonego indeksu [R2, Theorem 3.1]

- niech $\mathcal{A}$ będzie klasą filtrów na ω. Mówimy, że $u \in \mathcal{A}$ jest (dla $\mathcal{A}$) *relatywnie RK minimalny* jeśli dla każdej funkcji $f : \omega \to \omega$ albo $f(u) \approx u$ albo $f(u) \notin \mathcal{A}$. W [R2] pokazuję, że jeśli istnieją ultrafiltry Ramseyowskie, to w klasach o skończonych indeksach P-hierarchii i ultrafiltrów porządkowych istnieją elementy relatywnie minimalne i że w klasach P-hierarchii o indeksach nieskończonych następnikowych nie ma elementów relatywnie minimalnych. [R2, Corollary 4.6] [R2, Corollary 6.5]

- (CH) Wszystkie klasy P_α są niepuste [R2, Theorem 6.5]

- Mówimy, że klasa $\mathcal{A}$ ultrafiltrów istnieje generycznie, jeśli każdą rodzinę scentrowaną mocy $< \mathfrak{c}$ można rozszerzyć do elementu z $\mathcal{A}$. W [R2, Theorem 5.2] dowodzę, że minimalna moc bazy każdego monotonicznego konturu ciągowego rzędu ≥ 2 jest równa $\mathfrak{d}$ i kożystając z tej własności pokazuję, że istnienie generyczne każdej następnikowej klasy P-hierarhii i każdej następnikowej klasy ultrafiltrów porządkowych jest równoważne $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. [R2, Proposition 5.5] (co rozszerza wynik Ketonena [18, Theorem E] mówiący, że P-punkty istnieją generycznie wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$)

Praca R3 Praca w części przeglądowej opisuje mechanizmy wykorzystywane w pracy z kaskadami. W części badawczej odpowiada nie pytanie S. Garcii-Ferreiry i C. Uzcáteui'ego [13, Question 3.3] dotyczące filtrów podciągowych i daje dalszy opis ich własności.

Za [13] definiujemy *stopień podciągowy* filtrów podciągowych.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $A \subset X$. Połóżmy $A^0 = A$ i dla każdej liczby porządkowej θ definiujemy $A^\theta = \{x \in X : \exists (x_n)_{n<\omega} \subseteq A^\mu, (x_n) \to x\}$ jeśli $\theta = \mu + 1$ i $A^\theta = \bigcup_{\mu<\theta} A^\mu$ jeśli θ jest liczbą graniczną. Wiadomo, że prrestrzeń X jest ciągowa wtedy i tylko wtedy gdy istnieje takie $\theta < \omega_1$ że $A^\theta = \mathrm{cl}_X A$ (gdzie $\mathrm{cl}_X A$ oznacza domknięcie A w X) dla wszystkich $A \subseteq X$. Najmniejsza liczba θ z tą własnością jest nazywana *rzędem ciągowym* przestrzeni ciągowej X i jest oznaczana $\sigma(X)$. Dla przestrzeni ciągowej X i dla $x \in X$, definiujemy

$$\sigma(x, X) = min\{\theta \leq \omega_1 : \forall A \in \mathcal{P}(X)(x \in \mathrm{cl}_X A \Rightarrow x \in A^\theta)\}.$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie filtrem na ω. Zdefiniujmy przestrzeń $\xi(\mathcal{F})$ jak następuje: $\xi(\mathcal{F}) = \omega \cup \{\mathcal{F}\}$, gdzie ω jest zbiorem dyskretnych a otoczenia punktu $\mathcal{F}$ mają postać $\{\mathcal{F}\} \cup F$, dla $F \in \mathcal{F}$. Jeśli S jest przestrzenią ciągową zawierającą $\xi(\mathcal{F})$, wtedy rząd ciągowy $\mathcal{F}$ wewnątrz przestrzeni S jest liczbą porządkową

$$\sigma(\mathcal{F}, S) = min\{\theta \leq \omega_1 : \forall A \# \mathcal{F}(\mathcal{F} \in A^\theta)\},$$

gdzie iteracja A^θ jest brana wewnątrz przestrzeni S. *Podciągowy rząd* podciągowego filtra $\mathcal{F}$ jest liczbą porządkową

O.N.

$$\sigma(\mathcal{F}) = \min\{\sigma(\mathcal{F}, S) : S \text{ jest przestrzenią ciągową, taką, że } \xi(\mathcal{F}) \subseteq S\}.$$

W swej pracy [13] Garcia-Ferreira i Uzcáteui dowodzą

Twierdzenie 3.0.1 ([13, Theorem 3.2]). *Niech $(A_n)_{n<\omega}$ będzie partycją ω na zbiory nieskończone. Niech $\mathcal{F}_n$ będzie podciągowym filtrem na A_n i niech $\mathcal{F}$ będzie podciągowym filtrem na ω. Wówczas $\sigma(\mathrm{Li}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_n) \leq \min\{\sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \geq m\} : m < \omega\} + \sigma(\mathcal{F})$.*

i pytają czy powyższą nierówność można zastąpić równością, formalnie:

Pytanie 3.0.2 ([13, Question 3.3]). *Niech $(A_n)_{n<\omega}$ będzie partycją ω na nieskończone zbiory. Jeśli $\mathcal{F}$ jest filtrem podciągowym na ω i jeśli $\mathcal{F}_n$ jest filtrem podciągowym na A_n, czy jest prawdą, że: $\sigma(\mathrm{Li}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_n) = \min\{\sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \geq m\} : m < \omega\} + \sigma(\mathcal{F})$?*

Praca [R3] daje negatywną odpowiedź na to pytanie ([R3, Example 2.8, 2.9, 2.10] poza autoreferatem i [R3, Theorem 2.15] zamieszczone w autoreferacie). Co więcej podaje precyzyjniejsze oszacowanie $\sigma(\mathrm{Li}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_n)$ [R3, Theorem 2.6] i pokazuje, że nawet ono nie jest dokładne ([R3, Examples 2.8, 2.9] poza autoreferatem i [R3, Theorem 2.15] zamieszczone w autoreferacie.)

Definicja 3.0.3. *Niech $(A_n)_{n<\omega}$ będzie partycją ω na nieskończone zbiory. Niech $\mathcal{F}_n$ będzie podciągowym filtrem na A_n i niech $\mathcal{F}$ będzie podciągowym filtrem na ω. Wtedy $\sigma((\mathcal{F}_n) \mathrm{mod}\, \mathcal{F})$ definiujemy jako $\min\{\sup\{\sigma(\mathcal{F}_n) : n \in F\} : F \in \mathcal{F}\}$.*

Twierdzenie 3.0.4 (R3, Theorem 2.6). *Niech $(A_n)_{n<\omega}$ będzie partycją ω na nieskończone zbiory. Niech $\mathcal{F}_n$ będzie podciągowym filtrem na A_n i niech $\mathcal{F}$ będzie podciągowym filtrem na ω. Wówczas $\sigma(\mathrm{Li}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_n) \leq \sigma((\mathcal{F}_n) \mathrm{mod}\, \mathcal{F}) + \sigma(\mathcal{F})$*

Przedstawiam też twierdzenie pokazujące jak bardzo $\sigma(\mathrm{Li}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_n)$ jest niezależne od $\sigma((\mathcal{F}_n \mathrm{mod}\, \mathcal{F})$ i od $\sigma(\mathcal{F})$.

Twierdzenie 3.0.5 (R3, Theorem 2.15). *Niech α, β będą przeliczalnymi liczbami porządkowymi, niech $\delta(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ jeśli α jest następnikowe, $\delta(\alpha, \beta) = \alpha + (-1 + \beta)$ jeśli α jest graniczne, niech $\gamma \in \{\min\{\alpha+1, 1+\beta\}, \ldots, \delta(\alpha, \beta)\}$. Wtedy istnieje dyskretny ciąg $(\mathcal{F}_n)_{n<\omega}$ filtrów podciągowych i filtr podciągowy $\mathcal{F}$ taki, że $\sigma(\mathrm{Li}_{\mathcal{F}}\mathcal{F}_n) = \gamma$ gdzie $\sigma((\mathcal{F}_n) \mathrm{mod}\, \mathcal{F}) = \alpha$ i $\sigma(\mathcal{F}) = \beta$.*

Praca R4 to kolejna z prac poświęconych P-hierarchii. Przypomnijmy: niech (a_n) będzie ściśle rosnącym, nieskończonym ciągiem liczb naturalnych, zbiór $\{a_n : n < \omega\}$ jest *thin* jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$, ogół thin podzbiorów ω po dodaniu zbiorów skończonych, stanowi *thin ideał* oznaczany $\mathcal{T}$. W jego kontekście, w rozumieniu Baumgartnera, mówimy o *thin ultrafiltrach*. W pracy [R4] pokazano, że

- $(MA_{\sigma-centr})$ Dla każdego przeliczalnego γ w klasie P_γ istnieje $\mathcal{T}$-ultrafiltr [R4, Theorem 5];
- (CH) istnieje $\mathcal{T}$-ultrafiltr w klasie P_{ω_1} [R4, Proposition 6].

Praca R5 to praca z zakresu dydaktyki i popularyzacji nauki. W możliwie przystępny sposób opisujemy rozpoczynającemu przygodę z matematyką Czytelnikowi jak patrzeć na nieskończoność w rozumieniu analizy i teorii mnogości.

Praca R6 to podręcznik ze wstępu do matematyki z zakresem poszerzonym o aksjomatykę ZFC, indukcję i rekursję pozaskończoną i z dużym naciskiem na Lemat Kuratowskiego-Zorna. Ideą pracy było pokazanie roli teorii mnogości w dowodach twierdzeń z możliwie szerokiego zakresu matematyki i przygotowanie Czytelnika do samodzielnej pracy z wykorzystaniem aparatu teorii mnogości. Wykład nasz bogato ilustrujemy więc dowodami z zakresu analizy, algebry, teorii liczb, topologii, teorii grafów, kombinatoryki czy samej teorii mnogości w których zwracamy szczególną uwagę na wykorzystanie aksjomatów czy innych narzędzi teoriomnogiściowych. Znalazło się w nim też prawdopodobnie nowe twierdzenie [R6, Twierdzenie 7.20] o kolorowaniu grafów.

Praca R7 oprócz ultrafiltrów porządkowych i P-hierarchii w literaturze występuje trzecia hierarcha ultrafiltrów na ω - *Level ultrafiltry* zdefiniowane przez Baumgartnera z użyciem własności topologicznych w pracy [1].

W pracy [R7] pokazano, że wsztystkie te hierarchie, mimo, że oryginalnie definiowane przez porządek, własności kombinatoryczne i własności topologiczne, są charakterywalne w języku Level ultrafiltrów rozważanych dla odpowiednich przestrzeni topologicznych i rodzin funkcji. Zdefiniowano *standardową* rodzinę przestrzeni topologicznych i finkcji na nich określonych dla której (1) wspomniane powyżej hierarche są definiowalne przez elementy tej rodziny (2) wszystkie hierarchie definiowane przez elmenty tej rodziny podzielają wszystkie główne wspólne własności 3 wyżej wymienionych hierarchii.

O.K.

4 Patent

Pozostała część moich zainteresowań związana jest ze wspinaniem, w tym zakresie popełniłem patent **Pat. 214597** Starosolski Andrzej, 2009 *Pętla typu daisy chain*

Pętla typu daisy-chain jest chętnie stosowana w operacjach stanowiskowych, zjazdach i przy wspinaniu techniką sztucznych ułatwień (hakówka). Pętla jest zwykle dowiązana jednym końcem do uprzęży. Typowy sposób jej użycia to pierwsze wpięcie do punktu asekuracyjnego na pełną długość (tam na stałe nosi się karabinek) a następnie "skrócenie" na wygodną długość przez powtórne wpięcie pętli (jednego z jej uszek) w ten sam karabinek.

Problem, który niestety doprowadził już do kilku wypadków śmiertelnych, polega na tym, że wpinając po raz drugi ten sam karabinek w pętlę można doprowadzić do sytuacji gdy karabinek de facto jest zabezpieczony wyłącznie słabymi szwami tworzącymi "uszka" pętli daisy-chain, a nie samą pętlą (w tym rozumieniu, że przy obciążeniu karabinek może wypaść z pętli rozrywając jej strukturę, tak że ani taśma ani główny szew, tworzący z niej zamkniętą pętlę, nie zostaną zerwane) a kontrola tego, jak się wpina w sytuacji dużej ilości sprzętu na stanowisku jak i niewygodnego stanowiska jest trudna. Proponowanie przeze mnie rozwiązanie niweluje problem ryzyka niewłaściwego wpięcia pozostawiając inną ważną cechę pętli, mianowicie ciągle może ona być wykorzystana jako pochłaniacz energii odpadnięcia, co związane jest z rozrywaniem słabych szwów tworzących uszka pętli, pozwala więc w ten sposób chronić słaby przelot lub stanowisko.

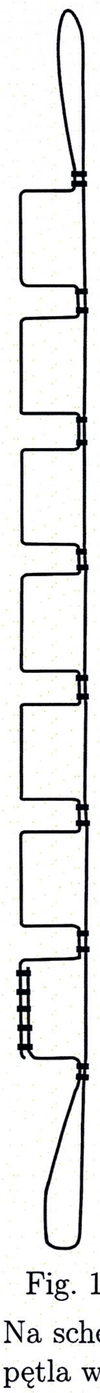

Fig. 1

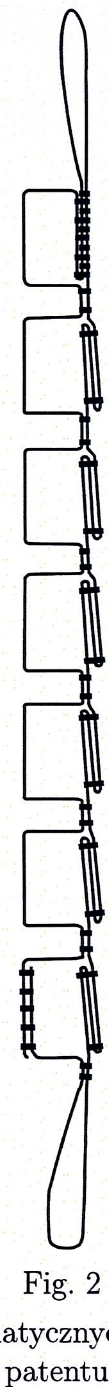

Fig. 2

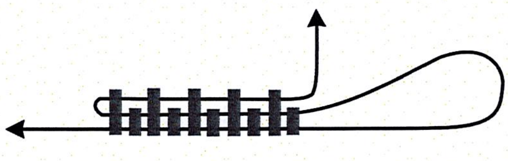

Fig. 3

Na schematycznych rysunkach: Fig.1 - klasyczna pętla daisy-chain, Fig. 2 - pętla wg. patentu, Fig. 3 - "A-szew" - kluczowy element rozwiązania.

Literatura

[1] J. E. Baumgartner, *Ultrafilters on ω,* J. Symb. Log. 1995, 60(2), 624-639.

[2] A. Blass, *The Rudin–Keisler ordering of P-points.* Trans. Amer. Math. Soc. 1973, 179, 145-166.

[3] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum,* in Handbook of Set Theory, 395-489, Springer, Dordrecht, 2010.

[4] J. Brendle, *Between P-points and nowhere dense ultrafilters,* Isr. J. Math., 1999, 113, 205-230.

[5] W. W. Comfort, S. Negropontis, *The Theory of Ultrafilters,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974.

[6] M. Daguenet, *Emploi des filtres sur N dans l'étude descriptive des fonctions,* Fund. Math., 1977, 95, 11-33.

[7] S. Dolecki, *Multisequences,* Quaestiones Mathematicae, 2006, 29, 239-277.

[8] S. Dolecki, F. Mynard, *Cascades and multifilters,* Topology Appl., 2002, 104, 53-65.

[9] S. Dolecki, A. Starosolski, S. Watson, *Extension of multisequences and countable uniradial class of topologies,* Comment. Math. Univ. Carolin., 2004, 44(1), 165-181.

[10] J. Flašková: *Ultrafilters and small sets.* Doctoral thesis, Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, 2006).

[11] S. Franklin, M. Rajagopalan, *On subsequential spaces,* Topology Appl., 1990, 35, 1-19.

[12] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters,* Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, 87-91.

[13] S. Garcia-Ferreira, C. Uzcáteui: *Subsequential filters* Toppology. Appl. 2009, 156, 2949-2959.

[14] G. Grimeisen, Gefilterte *Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse, I,* Math. Annalen, 1960, 141, 318-342.

[15] G. Grimeisen, Gefilterte *Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse, II,* Math. Annalen, 1961, 144, 386-417.

[16] M. Katětov, *On descriptive classes of functions,* Theory of Sets and Topology - a collection of papers in honour of Felix Hausdorff, D. V. W. 1972.

[17] M. Katětov, *On descriptive classification of functions,* General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II, Proc. Sympos. Prague, 1971.

[18] J. Ketonen J, *On the existence of P-points in the Stone-Čech compactification of integers,* Fund. Math., 1976, 92, 91-94.

[19] H. J. Kowalsky, *Beiträge zur topologischen Algebra,* Math. Nachr., 1954, 11, 143–185.

[20] B. Kuzeljević, D. Raghavan, *A long chain of P-points,* Journal of Mathematical Logic, 2018, 18(1), pp. 1850004, 38 pp.

O.K.

[21] C. Laflamme, *A few special ordinal ultrafilters,* J. Symb. Log., 1996, 61(3), 920-927.

[22] M. E. Rudin, *Partial orders on the types of βN,* Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 155, 353-362.

[23] A. R. D. Mathias, *Happy families*, Ann. Pure Appl. Logic, 1977, 12(1), 59-111.

[24] J. van Mill, *An introduction to $\beta\omega$,* W: K. Kunen, J. E. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1988.

[25] D. Raghavan, J. L. Verner, *Chains of P-points*, Canadian Math. Bull., 2019, 62(4), 856-868.

ANDRZEJ STAROSOLSKI, WYDZIAŁ MATEMATYKI STOSOWANEJ, POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE ; E-MAIL: ANDRZEJ.STAROSOLSKI@POLSL.PL